

Tesis de Posgrado

La distribución GoA en el modelado y análisis de imágenes de radar de apertura sintética

Mejail, Marta Estela

1999

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Computación de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Mejail, Marta Estela. (1999). La distribución GoA en el modelado y análisis de imágenes de radar de apertura sintética. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3188_Mejail.pdf

Cita tipo Chicago:

Mejail, Marta Estela. "La distribución GoA en el modelado y análisis de imágenes de radar de apertura sintética". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1999. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3188_Mejail.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

**La Distribución \mathcal{G}_A^0 en el Modelado y Análisis de Imágenes de Radar
de Apertura Sintética**

Marta E. Mejail

Director: Dr. Alejandro C. Frery
Co-Director: Dr. Oscar H. Bustos

Tesis presentada para obtener el Doctorado en Ciencias de la Computación.
Departamento de Computación. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires

Resumen

Los datos provenientes de un sistema de iluminación por radiación coherente, como lo son los datos de radar de apertura sintética – SAR (*Synthetic Aperture Radar*), pueden modelarse con el modelo multiplicativo. Este modelo es muy conveniente para explicar las características estadísticas de estos datos. El retorno *multilook* en formato amplitud se modela como una variable aleatoria que es el producto de otras dos variables aleatorias independientes. Estas variables aleatorias corresponden al *backscatter* y al ruido *speckle*. El modelo para el segundo, para el formato aquí considerado, es universalmente aceptado como la distribución Raíz Cuadrada de Gamma. Por otro lado, el modelo a utilizar para el *backscatter* solamente dependerá, idealmente, de algunos parámetros que representarán la información disponible a cerca de la rugosidad y de la textura de la imagen. Se pueden utilizar diferentes distribuciones para modelar el *backscatter*. Esta elección dependerá del grado de homogeneidad presente en las imágenes. Las distribuciones \mathcal{K} han sido muy utilizadas para modelar datos que han sido generados por un sistema de iluminación coherente, en particular para imágenes SAR. El modelo multiplicativo clásico postula que el retorno en amplitud de áreas no homogéneas obedece un tipo de distribución \mathcal{K} llamado \mathcal{K}_A . Si el área es homogénea la distribución $\Gamma^{1/2}$ modelará bien los datos y, por ser ésta un caso particular de la anterior, se preserva la validez del modelo \mathcal{K}_A . Sin embargo, las distribuciones \mathcal{K}_A no modelan bien los datos provenientes de áreas muy heterogéneas. Se ha propuesto el uso de las llamadas distribuciones \mathcal{G}^0 , para el modelado de áreas extremadamente heterogéneas. En este trabajo se estudia la factibilidad de substituir la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 en el ajuste de datos. Con este fin se propondrá una aproximación entre ambas distribuciones. Se verificará que la aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 tiene sentido práctico, concluyendo que se debe adoptar como verdadero modelo a la distribución \mathcal{G}_A^0 .

Agradecimientos

El presente trabajo de tesis no hubiese podido llevarse a cabo sin la valiosa colaboración de:

Alejandro Frery, por su permanente orientación y tutoría para la concreción de este trabajo de investigación. Porque siempre estuvo presente.

Oscar Bustos, por su amabilidad y predisposición para atender todas las consultas.

Irene Loiseau, por su continuo apoyo durante la realización del trabajo.

Quiero agradecer a mis compañeros, que siempre me escucharon, alentaron y ayudaron: Juan Santos, Juliana Gambini, Hernán Melgratti, Verónica Becher, Ricardo Rodríguez, Eduardo Fermé, Patricia Borenzstein, Gabriel Wainer, Anita Ruedin, Verónica Vilaplana e Isabel Mendez Díaz. A todos mis alumnos, de manera especial a Alejandro Varela y Wojtek Chomszcinsky.

A Mercedes y Aida, porque siempre me dieron fuerza para seguir adelante.

De manera muy especial quiero destacar la ayuda, sugerencias, asistencia, dedicación y esfuerzos personales de mi compañero y amigo Julio Jacobo, durante toda la realización de la tesis. Gracias Julio.

Quiero agradecer a mis amigos porque siempre encontré en ellos el respaldo y el afecto.

Quiero agradecer a mi familia porque han padecido mis abandonos y mis momentos difíciles, pero que sin su esfuerzo jamás hubiese logrado este objetivo.

Finalmente, gracias Pupa, porque estuviste incondicionalmente a mi lado.

A Martín, Leandro y Mailén

Índice General

1	Introducción	17
2	Radar de Apertura Sintética	21
2.1	Elementos del SAR	23
2.2	Geometría del SAR	25
2.3	Parámetros del Sistema	29
2.4	Coefficiente de Backscatter σ^0	30
2.5	Formatos de imágenes SAR	39
3	Distribuciones para Imágenes SAR	44
3.1	Modelo estadístico de las imágenes SAR	45
3.1.1	Speckle	48
3.1.2	Backscatter	49
3.1.3	Retorno	50
3.2	Distribuciones	52
3.2.1	La distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$	52
3.2.2	Las distribuciones para el <i>backscatter</i> de amplitud	56
3.2.3	Propiedades de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$	59
3.2.4	Interpretación de los parámetros de las distribuciones para el backscatter	69
3.2.5	Comparación de las densidades $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$	74
3.3	Las distribuciones para el retorno de amplitud	76
3.3.1	La distribución \mathcal{G}	76
3.3.2	La distribución \mathcal{K}_A	77

3.3.3	Propiedades de la distribución \mathcal{K}_A	79
3.3.4	La distribución \mathcal{G}_A^0	83
3.3.5	Propiedades de la distribución \mathcal{G}_A^0	90
3.3.6	Comparación entre las densidades de las distribuciones K_A y G_A^0	100
4	Estimación de Parámetros	109
4.1	Métodos de estimación	110
4.2	Estimadores de los parámetros de la distribución \mathcal{K}_A	113
4.2.1	Estimación del parámetro α por el método de los momentos	114
4.2.2	Estimador por máxima verosimilitud	115
4.2.3	Estimación conjunta de los parámetros (α, λ) por el método de los mo- mentos.	117
4.2.4	Estimación del parámetro α utilizando estadísticos de orden, para λ cono- cido.	118
4.2.5	Transformación Logarítmica	120
4.3	Estimadores de los parámetros de la distribución \mathcal{G}_A^0	121
4.3.1	Estimación del parámetro α por el método de los momentos	121
4.3.2	Tranformación Logarítmica para estimar α cuando el parámetro γ es conocido	123
4.3.3	Estimación del parámetro α por el método de máxima verosimilitud . . .	125
4.3.4	Estimación del parámetro α utilizando estadísticos de orden	126
4.3.5	Estimación conjunta de los parámetros α y γ por el método de los momentos.	128
4.3.6	Estimación conjunta de los parámetros (α, γ) usando transformación log- arítmica	133
4.3.7	Estimación conjunta de (α, γ) por el método de máxima verosimilitud . .	136
4.3.8	Estimación conjunta de (α, γ) utilizando técnicas mixtas	137
4.3.9	Algunas consideraciones sobre el parámetro de escala γ	141
5	Evaluación de estimadores	145
5.1	Generación de variables aleatorias	146
5.2	Comportamiento de los estimadores mediante experiencia de Monte Carlo	149

5.3	Aplicación	155
6	Substitución de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0	161
6.1	Distancia entre distribuciones	163
6.2	Aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0	164
6.3	Aproximación de las distribuciones del retorno através de las distribuciones del <i>backscatter</i>	165
6.4	Aproximación de las distribuciones de <i>backscatter</i>	168
6.5	Aproximación numérica de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0	171
6.6	Ajuste de datos de distribución \mathcal{K}_A con la distribución \mathcal{G}_A^0	175
6.7	Otro criterio de correspondencia	180
7	Resultados de aplicaciones	185
7.1	Clasificación de imágenes SAR	186
7.1.1	Clasificación usando los modelos $\Gamma^{1/2}$, \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0	188
7.2	Aplicación de la estimación de los parámetros α y γ a imágenes simuladas y reales.	192
7.2.1	Análisis de Datos Simulados	194
7.2.2	Extracción de características para la clasificación de imágenes SAR	196
7.3	Conclusiones	200
8	Conclusiones y Trabajos Futuros	206
A	Función de Bessel	210
B	Asimetría y Curtosis	212
C	Función Característica	215
D	Función Generadora de Momentos	216
E	Propiedades de Convergencia	218
F	Anexo \mathcal{K}_A	220

G Estimadores	222
G.1 Estimación por Momentos	222
G.2 Estimación por el método de Máxima Verosimilitud	224
G.3 Estadísticos de Orden	224
G.4 Criterios de Comparación	225
H Simulación	226
H.0.1 Sobre desigualdades de la función gamma	228

Índice de Figuras

2-1	Imagen SAR, de una región cercana a Munich, Alemania. Se puede notar el granulado debido al ruido <i>speckle</i>	22
2-2	Geometría de formación de imágenes de radar	26
2-3	Geometría de formación de imágenes de radar (corte transversal)	27
2-4	Suma de N_s de fasores elementales de módulo y fase aleatorias. (pág. 477, Ulaby et al. 1982)	34
2-5	Tres formatos para una misma escena: compleja (real e imaginaria, arriba), amplitud (abajo izquierda) e intensidad (abajo derecha) (pág. 86, Understanding Synthetic Aperture Radar Images. C.Oliver and S. Quegan)	43
3-1	Imagen E-SAR de la zona de Gilching, donde se observa el efecto granulado a causa del ruido <i>speckle</i>	46
3-2	Funciones de densidad $\Gamma^{1/2}(n, n)$ del <i>speckle</i> para $n = 1, 2$ and 4 looks (sólido, cortada y punteada resp.)	49
3-3	Función de densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ con $\alpha = 1, \gamma = 1$ y $\lambda = 1$	55
3-4	Varianza de la distribución $\Gamma^{1/2}$ en función de los parámetros α y λ	61
3-5	Gráfico de $Var(X) = \alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha+1/2)}{\Gamma^2(\alpha)}$, en función de α y para $\lambda = 1$	61
3-6	Coefficiente de variación $CV_{\Gamma^{1/2}}$ de la distribución $\Gamma^{1/2}$, en función del parámetro α	62
3-7	Variación del coeficiente de asimetría γ_1 , de la distribución $\Gamma^{1/2}$, en función del parámetros α para número de looks $n = 1$	63
3-8	Variación del coeficiente de curtosis γ_2 en función del parámetro α	64

3-9	Varianza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ en función de los parámetros α y γ	66
3-10	Varianza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ en función del parámetro α y $\gamma = 1$	67
3-11	Coeficiente de variación $CV_{\Gamma^{-1/2}}$ de la distribución $\Gamma^{-1/2}$, en función del parámetro α	69
3-12	Gráfico de las densidades de $\Gamma^{1/2}$ para $\lambda = 1$ y $\alpha \in \{0.5, 1, 2, 3, 4, 10\}$ (sólida gruesa, sólida, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, respect.)	70
3-13	Funciones de densidad de la distribución $\Gamma^{1/2}$ para $\lambda = 1$ y $\alpha \in \{0.01, 0.2, 0.5\}$. .	70
3-14	Gráfico de densidades de $\Gamma^{1/2}$ para $\alpha = 1$ y $\lambda \in \{1, 5, 10, 20, 40\}$ (sólida, raya, punto, punto raya, punto punto raya, resp.)	71
3-15	Gráfico de las densidades $\Gamma^{1/2}$ correspondientes a los valores $\alpha \in \{0.5, 1, 2, 3, 4, 10\}$ y los valores de λ tal que la media sea unitaria.. (sólida gruesa, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, sólida)	72
3-16	Gráficos de las densidades $\Gamma^{-1/2}$ para $\gamma = 1$ y $\alpha \in \{-0.5, -1, -2, -3, -4, -10\}$ (sólida gruesa, sólida, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, resp.) .	74
3-17	Gráfico de la varianza de $\Gamma^{-1/2}(-\alpha, 1)$ en función de α	75
3-18	Las curvas corresponden a las varianzas de $\Gamma^{1/2}$ (sólida) y $\Gamma^{-1/2}$ (punteada) en función de $ \alpha $, para $\lambda = \gamma = 1$	76
3-19	Gráfico de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha = -1$ y $\gamma \in \{1, 5, 10, 20\}$	77
3-20	Gráficos de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha \in \{-0.8, -1, -4, -10\}$ y valores de γ tal que la media sea 1, que aparecen en la tabla 1.2 . (sólida, cortada, punteada, punto línea, resp.)	78
3-21	Representación logarítmica de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha \in \{-0.8, -1, -4, -10\}$ y valores de γ tal que la media sea 1, que aparecen en la tabla 1.2, (sólida, cortada, punteada, punto raya, resp.)	79
3-22	Gráfico de las densidades $\Gamma^{1/2}(0.5, 0.31)$ y $\Gamma^{-1/2}(-0.8, 0.32)$ (sólida y punteada, resp.)	80
3-23	Densidades $\Gamma^{1/2}(4, 3.7)$ (sólida), $\Gamma^{-1/2}(-4, 3.2)$ (cortada), $\Gamma^{1/2}(10, 9.7)$ (punteada) y $\Gamma^{-1/2}(-10, 9.2)$ (punto raya)	81
3-24	Funciones de densidad correspondientes a $\mathcal{G}(1, 1, 1, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}(2, 1, 1, 1)$ (punteada), respectivamente	82

3-25	Funciones de densidad correspondientes a $\mathcal{G}(1, 1, 1, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}(2, 1, 1, 1)$ (punteada), en su representación logarítmica.	83
3-26	Varianza de la distribución \mathcal{K}_A en función de α y λ , para $n = 1$	84
3-27	Densidades de la distribución \mathcal{K}_A para $n = 1$, $\lambda = 1$ y $\alpha = 1$ (sólida), $\alpha = 4$ (rayada) y $\alpha = 8$ (punteada), resp.	85
3-28	Densidades correspondientes a $\mathcal{K}_A(1, 0.6, 1)$ (sólida) y $\mathcal{K}_A(4, 2.95, 1)$ (cortada) y $\mathcal{K}_A(8, 6.09, 1)$ (punteada). Los valores de λ son los obtenidos suponiendo media unitaria.	86
3-29	Densidades de la distribución \mathcal{K}_A , para $\alpha = 1$, $n = 1$ y $\lambda = 1$ (sólida), $\lambda = 10$ (cortada) y $\lambda = 100$ (punteada)	87
3-30	Gráfico correspondiente a las funciones de densidad de la distribución $\mathcal{K}_A(1, 1, 1)$ (sólida), $\mathcal{K}_A(1, 1, 2)$ (cortada), $\mathcal{K}_A(1, 1, 10)$ (punteada), resp.	88
3-31	Densidades $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ para $\alpha = -1$ (sólida), $\alpha = -4$ (rayada) y $\alpha = -8$ (punteada)	91
3-32	Densidades $\mathcal{G}_A^0(-1, \gamma, 1)$ para $\gamma = 10$ (sólida), $\gamma = 50$ (rayada) y $\gamma = 100$ (punteada), resp.	92
3-33	Densidades $\mathcal{G}_A^0(-1, 1, n)$ para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 10$	93
3-34	Variación de la moda de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$	94
3-35	Variación de la moda con respecto al parámetro α para datos de media unitaria	95
3-36	Variación de la moda en función de α y γ , para $n = 1$	96
3-37	Variación de la moda con respecto al número de looks. Se consideró $\gamma = 1$ y $\alpha = -1$ (sólida), $\alpha = -10$ (rayada), $\alpha = -50$ (punteada). La recta horizontal corresponde a la asíntota $\sqrt{\frac{2\gamma}{1-2\alpha}}$	97
3-38	Varianza de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α , para $n = 1$ y $\gamma = 1$	98
3-39	Varianza de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función de los parámetros α y γ , para $n = 1$	99
3-40	Coeficiente de asimetría γ_1 en función del parámetro α , para $n = 1$	100
3-41	Coeficiente de asimetría en función del número de looks n , para $\alpha \in \{-100, -10, -4, -1.6\}$ gráfica en escala log-log	101
3-42	Variación del coeficiente de curtosis de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α , para número de looks $n = 1$	102

3-43	Gráfico de γ^* (media unitaria), en función de α y n .	103
3-44	Gráfico del parámetro λ^* (media unitaria), en función de α y n .	104
3-45	Variación del parámetro γ^* de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α_G , para $n = 1$.	106
3-46	Variación del parámetro λ^* de la distribución \mathcal{K}_A en función del parámetro α , para $n = 1$.	106
3-47	Variación de $\lambda^*\gamma^*$ en función de α_K y α_G .	107
3-48	Curvas correspondientes a las densidades $\mathcal{K}_A(10, 7.66, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A(-10, 11.78, 1)$ (rayada) y $\mathcal{K}_A(1, 0.616, 1)$ (punteada) y $\mathcal{G}_A(-1, 0.405, 1)$ (punto linea)	107
3-49	Curva del coeficiente de variación CV_K de la distribución \mathcal{K}_A , en función del parámetro α , para $n = 1$.	108
3-50	Curva del coeficiente de variación CV_G de la distribución \mathcal{G}_A^0 , en función del parámetro α , para $n = 1$.	108
4-1	Gráficos de las funciones $f_{m_{1/2}}$, f_{m_1} y f_{m_2} (sólida, rayada y punteada, resp.)	116
4-2	Gráficos de $f_{m_{1/2}m_1}$ (sólido) y $f_{m_1m_2}$ (punteada)	118
4-3	Gráficos de las funciones $f(\hat{\alpha}_r)$ para $r = 1/2$ (sólida) y $r = 1$ (punteada)	123
4-4	Gráfico de la función $\Psi(-\alpha)$	125
4-5	Gráfico de la función $\Psi(n - \hat{\alpha}_{ML}) - \Psi(-\hat{\alpha}_{ML})$, que depende del estimador de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}_{ML}$, para γ conocido y $n = 1$.	127
4-6	Variación de la función $f(\hat{\alpha})$ con respecto a los valores $\hat{\alpha}$	130
4-7	Variación de la función $\frac{n\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n+\frac{1}{2})}$	131
4-8	Gráfico de f	133
4-9	Gráfico de $\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n)}{\Gamma^2(n+1/4)}$	134
4-10	Variación de $f(\hat{\alpha})$ para el estimador conjunto de los parámetros α y γ por los momentos de orden 1 y 2 de $\ln Z$	136
4-11	Comportamiento de la función $f(\hat{\alpha})$ para el estimador por momentos de orden 1/2 de Z y el estimador de orden 1 de $\ln Z$	139
4-12	Los puntos del plano que están por debajo de la curva, cumplen con la relación $\ln m_{12}^2 - \frac{\alpha}{2} > m_1^{\ln}$	140

4-13	Gráfico de $f(\hat{\alpha})$ basada en el estimador del momento de orden $1/2$ y el estimador de máxima verosimilitud, para estimar en forma conjunta los parámetros α y γ	141
4-14	Variación del parámetro $\hat{\gamma}$ en función del parámetro $\hat{\alpha}$	142
4-15	Variación de $\frac{(-\alpha-1/2)^{-1/2}}{\Gamma(-\alpha-1/2)}\Gamma(-\alpha)$ en función de α . La imagen de esta función es $\{y \in R/y \leq 1\}$	144
5-1	Area original bajo estudio y las clases analizadas: cultivo (amarillo), selva (verde), y urbana (violeta)	156
5-2	Valores estimados localmente del parámetro α , de un corte de la imagen original (línea roja), usando una ventana deslizante de 7×7	157
5-3	Histograma de la clase cultivo junto con el ajuste de tres curvas de las distribuciones: $\Gamma^{1/2}$ (trazos cortos), \mathcal{K}_A (trazos largos) and \mathcal{G}_A^0 (lineas sólidas, respectivamente)	158
5-4	Histograma de la clase Selva junto con el ajuste de tres curvas de las distribuciones: $\Gamma^{1/2}$ (trazos cortos), \mathcal{K}_A (trazos largos) and \mathcal{G}_A^0 (lineas sólidas, respectivamente)	159
5-5	Histograma de la clase urbana junto con el ajuste de tres curvas de las distribuciones: $\Gamma^{1/2}$ (trazos cortos), \mathcal{K}_A (trazos largos) and \mathcal{G}_A^0 (lineas sólidas, respectivamente)	160
6-1	Gráfico que muestra la variación de $\frac{n\Gamma(2n-1)}{2^{2n}\Gamma^2(n)}$ en función de n	168
6-2	Densidades $\mathcal{K}_A(4, 2.95, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A^0(-4.29, 4.52, 1)$ (punteada)	174
6-3	Densidades $\mathcal{K}_A(8, 6.09, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A^0(-8.28, 9.23, 1)$ (punteada)	175
6-4	Densidades $\mathcal{K}_A(1, 2.95, 0.6)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A^0(-1, 4.52, 0.4)$ (punteada)	176
6-5	Distancia entre las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α_G . Se consideraron dos casos: $\alpha_K = 4$ (sólida) y $\alpha_K = 8$ (punteada)	177
6-6		182
6-7	Histograma correspondiente a los valores estimados de α_G para 1000 muestras con distribución \mathcal{K}_A para $\alpha_K = 8$	183
6-8	Curvas correspondientes a las densidades $\mathcal{K}_A(4, 2.95, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A(-5, 5.422, 1)$ (punteada)	184

6-9	Curvas correspondientes a las densidades $\mathcal{K}_A(8, 6.09, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A(-9, 10.5, 1)$ (punteada).	184
7-1	Imagen JERS-1 de la zona de Tapajos (Brasil) de 3 looks	186
7-2	Imagen JERS-1 con zonas de entrenamiento correspondientes a: corte (rojo), corte con regeneración (azul) y selva (verde)	187
7-3	Imagen clasificada con el método de máxima verosimilitud, bajo el modelo $\Gamma^{1/2}$.	190
7-4	Imagen JERS-1 clasificada con el método ICM, usando como modelo de ajuste a la distribución $\Gamma^{1/2}$	192
7-5	Clasificación, por el método de máxima verosimilitud, de la imagen JERS-1, bajo el modelo \mathcal{K}_A	193
7-6	Imagen JERS-1 clasificada con el método ICM, bajo el modelo \mathcal{K}_A	194
7-7	Imagen JERS-1 clasificada con el método de máxima verosimilitud, suponiendo que los datos son ajustados por la distribución \mathcal{G}_A^0	195
7-8	Imagen JERS-1 clasificada con el método ICM bajo el modelo \mathcal{G}_A^0	196
7-9	Gráfico de los datos de la clase corte, y las curvas de ajuste correspondiente a $\mathcal{K}_A(16.649, 0.0041, 2.95)$ (izquierda) y $\mathcal{G}_A^0(-19.426, 74706.26, 2.95)$ (derecha) . . .	197
7-10	Gráfico de los datos de la clase corte con regeneración, y las curvas de ajuste corre- spondiente a $\mathcal{K}_A(13.764, 9080.75, 2.95)$ (izquierda) y $\mathcal{G}_A^0(-14.167, 119671.72, 2.95)$ (derecha)	199
7-11	Gráfico de los datos de la clase selva, y las curvas de ajuste correspondiente a $\mathcal{K}_A(12.556, 0.00083, 2.95)$ (izquierda) y $\mathcal{G}_A^0(-12.797, 178374.07, 2.95)$ (derecha) . .	200
7-12	Imagen sintética con cuatro clases con distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$ (de izquierda a derecha y de arriba a abajo) a) $\alpha = -1.5, \gamma = 200000$, b) $\alpha = -1.5, \gamma = 400000$, c) $\alpha = -5, \gamma = 200000$, d) $\alpha = -5, \gamma = 400000$	201
7-13	Clasificación por máxima verosimilitud de la imagen simulada	201
7-14	Imágenes resultantes de estimar localmente el parámetro de rugosidad (α , imagen de la izquierda) y el parámetro de escala (γ , imagen de la derecha), con ventana deslizante de 7×7 en ambos casos.	202
7-15	Clasificación de la imagen de parámetros (α, γ) estimados de los datos simulados, utilizando el método de Máxima Verosimilitud con distribución Gaussiana. . . .	202

7-16	Imágenes de los parámetros estimados localmente (izquierda: rugosidad, derecha: escala) de la imagen JERS-1 de Tapajós.	203
7-17	Imagen JERS-1 clasificada por el método de máxima verosimilitud, suponiendo gaussianidad en las muestras y usando las imágenes de los parámetros estimados localmente.	203
7-18	Imagen original E-SAR de Gilching.	204
7-19	Imágenes correspondientes a la estimación local de los parámetros de rugosidad (izquierda) y de escala (derecha), obtenidos de la imagen E-SAR.	204
7-20	Clasificación por el método de máxima verosimilitud (suponiendo gaussianidad) de las imágenes de los parámetros estimados localmente α y γ de la imagen original E-SAR.	205

Índice de Tablas

2.1	Bandas de frecuencia de radar	29
3.1	Valores correspondientes a la simetria y curtosis para distintos valores de alpha .	68
3.2	Se muestran la variación de la moda para distintos valores de α	68
3.3	Se muestran la variacion de la moda para distintos valores de α con los correspondientes valores de γ tal que la media sea unitaria	68
3.4	Se muestran la variacion de la moda para distintos valores de γ	68
3.5	Valores del parametro λ en funcion del parametro α para media unitaria	105
3.6	Valores del parámetro γ en funcion del parámetro α para media unitaria	105
3.7	Coefficientes de Variación de la distribución K y de la distribución G	105
5.1	Resultados de simulacion para 1 look	153
5.2	Resultados de simulacion para 2 looks	154
5.3	Resultados de simulacion para 4 looks	154
5.5	Comparación de los estimadores usando los criterios del error cuadrático medio y la distancia al verdadero valor	155
5.4	Resultados de simulacion para 8 looks	155
5.6	Caracteristicas principales de las muestras, estimacion de los parametros y el -valor del test de χ^2 (entre corchetes) para las tres distribuciones consideradas. .	156
6.1	En esta tabla se muestra, para 1 look, los valores de α_K y sus correspondientes valores de α_G que minimizan la integral. Se muestran también los valores correspondientes a los dos parámetros de escala λ y γ , para datos con media unitaria.	172
6.2	Idem que tabla 6.1 para 2 looks	172

6.3	Idem que tabla 6.1 para 4 looks	173
6.4	se muestra el valor correspondiente al minimo de la integral para cada valor de α_K , entre 4 y 10, con paso 0.5 y para el correspondiente valor α_G que minimiza dicha integral.	173
6.5	Para α_K fijo, para R número de replicaciones y T número de muestra, se observa el promedio de los valores estimados de α_G y el porcentaje de muestras rechazadas en cada caso	180
6.6	Para cada valor de α_K se estimo el valor medio de los α_G estimados correspondiente a R=1000 muestras de tamaño T=10000, para 1 look,	181
6.7	Para tres niveles de confianza, se muestra el porcentaje de muestras rechazadas cuando el ajuste se hace con la distribucion K o con la distribucion G	181
6.8	parámetros de la distribución GA0 calculados usando primer y segundo momentos de las distribuciones KA y GA0	183
7.1	Matriz de Confusión de la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste raíz cuadrada de Gamma y el método ICM	189
7.2	Porcentaje de errores por comisión y omisión en la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste raíz cuadrada de Gamma y el método ICM	189
7.3	Matriz de Confusión de la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste KA y el método ICM	189
7.4	Porcentaje de errores cometidos y omitidos en la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste KA y el método ICM	190
7.5	Matriz de Confusión de la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste GA0 y el método ICM	191
7.6	Porcentaje de errores cometidos y omitidos en la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste GA0 y el método ICM	191
7.7	Análisis descriptivo de la clase corte	191
7.8	Análisis descriptivo de la clase corte con regeneración	191
7.9	Análisis descriptivo de la clase selva	198
7.10	Para cada clase se muestran la media y desviacion estandar y los valores originales de los parámetros con que fueron generadas las regiones	198

7.11 Matriz de confusión de la clasificación utilizando las imágenes de los parámetros estimados de rugosidad y escala de la imagen JERS-1	198
7.12 Matriz de confuson de la clasificacion utilizando las imagenes estimadas de los parametros de rugosidad y escala de la imagen E-SAR	199

Capítulo 1

Introducción

Los datos provenientes de un sistema de iluminación por radiación coherente, como lo son los datos de radar de apertura sintética SAR (*Synthetic Aperture Radar*), pueden modelarse con el modelo multiplicativo. Este modelo es muy conveniente para explicar las características estadísticas de estos datos.

El modelo multiplicativo afirma que, bajo ciertas condiciones, la interferencia constructiva y destructiva de las señales incidente al y reflejada por el blanco observado dan un retorno que varía, en forma aleatoria, con la media del *backscatter* o retrodispersión del blanco iluminado. Esta cantidad, inherente al blanco, es la que interesa inferir a partir de las observaciones.

Este tipo de datos padece de la presencia de un ruido granular, llamado *speckle*, característico de toda imagen formada con iluminación coherente; otras situaciones de este tipo son las imágenes de ecografía y laser. Para mitigar este ruido, que dificulta tanto el análisis visual como el automático de las imágenes SAR, se puede aplicar un procesamiento llamado *multilook*. La contrapartida intuitiva de este tipo de procesamiento es que cada *look* es una observación independiente de la misma escena, y la imagen procesada en n *looks* es el resultado de realizar un promedio con n de estas imágenes independientes. La señal SAR original es compleja, y en la práctica se trabaja con la amplitud (módulo del complejo) o con la intensidad (cuadrado de la amplitud) de esta señal.

Matemáticamente, el retorno *multilook* en formato amplitud se modela como una variable aleatoria que es el producto de otras dos variables aleatorias independientes. Estas variables aleatorias corresponden al *backscatter* y al ruido *speckle*. El modelo para el segundo, para

el formato aquí considerado, es universalmente aceptado como la distribución Raíz Cuadrada de Gamma. Por otro lado, el modelo a utilizar para el *backscatter* solamente dependerá, idealmente, de algunos parámetros que representarán la información disponible a cerca de la rugosidad y de la textura de la imagen [UKBW86].

Nos interesará conocer cuál es el comportamiento de los parámetros para los diferentes modelos propuestos para el *backscatter*. Hecho ésto, la estimación de los parámetros para las diferentes distribuciones resultantes del retorno, jugará un papel de gran importancia.

Se pueden utilizar diferentes distribuciones para modelar el *backscatter*. Esta elección dependerá del grado de homogeneidad presente en las imágenes. Para muchos sensores SAR, las áreas urbanas, áreas de bosque y áreas de pastizales tienen homogeneidad creciente, y para cada uno de estos tipos de datos habrá una clase de distribuciones que los ajusta mejor.

Las distribuciones \mathcal{K} [JT87] han sido muy utilizadas para modelar datos que han sido generados por un sistema de iluminación coherente, en particular para imágenes SAR [Oli91]. A estas distribuciones se las consideraba bastante generales, pues permiten modelar datos homogéneos y heterogéneos, hasta la propuesta de [FMYS97] que, como se verá, tiene más generalidad y tratabilidad.

El modelo multiplicativo clásico postula que el retorno en amplitud de áreas no homogéneas obedece un tipo de distribución \mathcal{K} llamado \mathcal{K}_A . Si el área es homogénea la distribución $\Gamma^{1/2}$ modelará bien los datos y, por ser ésta un caso particular de la anterior, se preserva la validez del modelo \mathcal{K}_A . Sin embargo, las distribuciones \mathcal{K}_A no modelan bien los datos provenientes de áreas muy heterogéneas.

Dada la necesidad de hallar un modelo para datos extremadamente heterogéneos, Frery et al. [FMYS97] propusieron una nueva clase de distribuciones, las distribuciones \mathcal{G} , que cumplen con estas expectativas. En ese mismo trabajo se propone el uso de un caso particular de las distribuciones \mathcal{G} , las llamadas distribuciones \mathcal{G}^0 , para el modelado de áreas extremadamente heterogéneas. Las distribuciones \mathcal{G}^0 son de gran importancia, pues modelan muy bien datos que provienen de áreas urbanas y que, en particular, no se pueden modelar con las distribuciones \mathcal{K} .

Las distribuciones \mathcal{G}^0 tienen tantos parámetros como las distribuciones \mathcal{K} y sus funciones de densidad y distribución acumulada son más tratables teórica y computacionalmente que las

de las segundas. Otra ventaja de usar las distribuciones \mathcal{G}^0 en relación a las distribuciones \mathcal{K} es la posibilidad de substituir estas últimas por las primeras, sin perder calidad en el modelado de los datos.

En este trabajo se estudia la factibilidad de substituir la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 en el ajuste de datos. Con este fin se propondrá una aproximación entre ambas distribuciones. Se verificará que la aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 tiene sentido práctico.

Una vez verificada la factibilidad de esta aproximación, se podrá considerar a las imágenes SAR bajo el modelo de la distribución \mathcal{G}_A^0 únicamente.

El problema de aproximación se encarará de dos formas: una teórica, donde se propondrá una distancia entre las dos distribuciones la cual se intentará minimizar, para obtener una correspondencia entre ellas; y la segunda, práctica, que consistirá en medir las distancias entre distribuciones empíricas y distribuciones teóricas. Para aproximar la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 , se propondrá la distancia L_2 entre sus respectivas densidades, justificando el por qué de su elección.

Se medirá la calidad del ajuste de datos \mathcal{K}_A al ajustarlos con la distribución \mathcal{G}_A^0 , utilizando el test de adherencia χ^2 en una experiencia Monte Carlo y se estimará el tamaño de la muestra más grande que no lleva al rechazo de la hipótesis. Este test de adherencia también sirve para justificar la elección de la distancia utilizada, entre otras posibles.

Finalmente se medirá, en diferentes áreas de una imagen SAR, el ajuste de los datos suponiendo, en primer lugar, que estos provienen de una distribución \mathcal{K}_A y luego que provienen de una distribución \mathcal{G}_A^0 . Se llegará a la conclusión de que el modelo de ajuste para datos SAR es la distribución \mathcal{G}_A^0 .

En el Capítulo 2 se presentará una síntesis de la generación de imágenes SAR y sus diferentes formatos: complejo, intensidad y amplitud. En esta tesis solamente se utilizarán formato amplitud, por razones que se expondrán en el mismo capítulo. Para el formato amplitud se estudiarán las distribuciones involucradas y se presentarán sus más importantes propiedades en el Capítulo 3. Los métodos utilizados para estimar los parámetros de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 del modelo propuesto serán presentados en el Capítulo 4. El Capítulo 5 es el concerniente a la simulación de imágenes SAR donde se realiza una comparación de los estimadores para la

distribución \mathcal{G}_A^0 a través de ensayos de Monte Carlo. El Capítulo 6 está dedicado a la aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 , dándose un enfoque teórico y un enfoque numérico. Para finalizar, debido a los problemas cuando se utiliza la distribución \mathcal{K}_A y gracias a las mejoras al utilizar la distribución \mathcal{G}_A^0 , en el Capítulo 7 se mostrarán los resultados de reemplazar la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 , cuando se hacen clasificaciones de imágenes SAR

Capítulo 2

Radar de Apertura Sintética

Los principios del funcionamiento del Radar de Apertura Sintética han sido objeto de numerosos estudios generando una amplia bibliografía sobre el tema, [FTUF82], [OQ98], [Jac99], entre otros.

El Radar de Apertura Sintética (SAR) es un dispositivo de microondas activo que permite generar imágenes de alta resolución. El mismo emite señales de microondas a intervalos regulares sobre una región de interés, recibe la parte de esta energía que es retrodispersada desde dicha región y detecta la intensidad y la distancia, es decir el retardo en el tiempo de las señales de retorno.

El radar posee su propia fuente de energía y por lo tanto, es independiente de la luz del sol para la iluminación. Este tipo de sistema se conoce como sistema de teledetección activo. La gran ventaja del radar sobre los sensores ópticos es la posibilidad de funcionar tanto de día como de noche y la de atravesar las capas de nubes, lo que implica una gran disponibilidad de información.

Estos hechos, junto con la sensibilidad a la rugosidad de la superficie y al contenido de humedad del suelo, (debido a las longitudes de onda en que emite el radar), significan que el SAR es una herramienta muy poderosa en sensoramiento remoto. Dadas sus características puede distinguir diferentes tipos de cobertura de la Tierra, así como también puede detectar cambios temporales, de gran utilidad por ejemplo, en agricultura.

Además, este sistema opera en diferentes frecuencias y polarizaciones, lo que permite obtener distintas clases de información de un mismo objeto sensado.

En los últimos años se han generado un gran número de imágenes SAR (provenientes de diferentes sensores transportados en aviones o en satélites) y es por esto que es de suma importancia generar herramientas automáticas para poder extraer información que permitirá la interpretación y la detección de cambios en las mismas.

El sistema SAR genera imágenes que, a diferencia de las generadas por los sensores ópticos son de difícil visualización e interpretación y esto se debe a diversos factores que mencionaremos a continuación.

Una imagen generada por un sistema de iluminación coherente, tal como lo es el SAR, es afectada por la interferencia coherente de los dispersores. Sobre diferentes tipos de regiones extensas, como por ejemplo campos cultivados y grandes extensiones de bosque, esta interferencia causa una fluctuación en la intensidad detectada, que variará de celda de resolución a celda de resolución. Este efecto se denomina *speckle* y da a la imagen una apariencia granulada, como puede verse en la figura 2-1. Debido a la naturaleza eminentemente aleatoria del ruido *speckle*

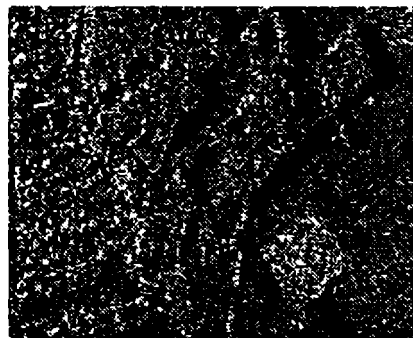


Figura 2-1: Imagen SAR, de una región cercana a Munich, Alemania. Se puede notar el granulado debido al ruido *speckle*

(este ruido es uno de los principales problemas del SAR), las imágenes SAR no pueden ser analizadas en base al pixel solamente, sino que es necesario basar este análisis en estimaciones estadísticas sobre las regiones de la imagen. Por lo tanto, para diseñar algoritmos que extraigan información de las imágenes se debe tener un amplio conocimiento del comportamiento estadístico de las mismas, en particular del comportamiento del *speckle* y su efecto en las estadísticas de la imagen. Esto implica proponer un modelo estadístico adecuado y estimar los parámetros que están involucrados en dicho modelo.

Es necesario, entonces, determinar cuál es la mejor estimación de estos parámetros a partir de los datos y deducir las distribuciones muestrales correspondientes que nos permitirán tomar decisiones y lograr así discriminar las distintas regiones de la imagen.

En imágenes ópticas, ha sido comunmente utilizada la distribución Gaussiana para modelar este tipo de datos, sus propiedades han sido muy estudiadas, desarrollándose numerosas técnicas junto con su implementación computacional para este modelo. El tratamiento del ruido, para estos datos, se hace bajo un modelo aditivo.

Hacemos notar que el ruido *speckle*, a diferencia del ruido de imágenes ópticas, no es gaussiano sino que se utilizan otras distribuciones que ajustan mejor estos datos, ni tampoco es aditivo sino que es multiplicativo. A raíz de lo recién mencionado, no es posible aplicar a estas imágenes el tratamiento clásico de procesamiento que se utiliza en sensores ópticos.

Otro factor a tener en cuenta es la geometría de las imágenes SAR que produce problemas para el despliegue y análisis de los datos adquiridos por este sistema.

En las siguientes secciones se tratarán los elementos básicos del SAR, su geometría y los distintos formatos de las imágenes generadas por este sistema.

2.1 Elementos del SAR

Las técnicas de teledetección por radar pueden proporcionar información acerca de la superficie de la Tierra en relación con: rugosidad de la misma, topografía, condiciones de humedad, vegetación.

Los sistemas de Radar (*RA*dio *D*etection *A*nd *R*anging) son capaces de producir imágenes de la Tierra de alta resolución. Este es un dispositivo que detecta un objeto e indica su distancia y su posición. En general, la mayoría de los radares aerotransportados que producen imágenes son de vista lateral (SLAR: *S*ide *L*ooking *A*irbone *R*adar), dentro de éstos se encuentran dos tipos: radar de apertura real (RAR: *R*eal *A*perture *R*adar) y radar de apertura sintética (SAR: *S*ynthetic *A*perture *R*adar).

El mayor problema de los sensores RAR radica en su baja resolución espacial como consecuencia del escaso diámetro de la antena, donde el tamaño mínimo del objeto identificable en la imagen está en relación directa con la longitud de onda y la altura de observación y es

inversamente proporcional al diámetro de la apertura. En una plataforma espacial, sería imposible lograr una buena resolución con este sistema, dado que sería preciso contar con antenas de enormes proporciones.

Se ha desarrollado una técnica muy avanzada que permite simular una antena mediante la sucesión de señales recibidas por una antena real situada a bordo de una aeronave. Esta antena se denomina apertura sintética, y se basa en el efecto Doppler (cambio de fase de una señal debido a un cambio de distancia) que afecta a la observación cuando hay un movimiento relativo entre el objeto y el sensor.

Se requieren dos procesos para producir una imagen SAR: el sensor debe volar sobre la zona y registrar una sucesión de señales de cada objeto y además debe procesarse la sucesión de señales para formar una imagen reconocible.

Debido a la manera en que son generadas las imágenes SAR se producen problemas para la visualización y análisis de los datos adquiridos por este sistema. Por tratarse de un haz emitido artificialmente, pueden controlarse las condiciones de adquisición: ángulo, distancia, orientación, polarización, etc.

El radar, ya sea transportado en plataforma aérea o espacial, observa la superficie de la Tierra lateralmente. Este hecho, junto a las variaciones en los ángulos de emisión e incidencia de la radiación lleva a deformaciones geométricas en las imágenes de radar. Por otro lado, la señal de retorno depende del coeficiente de retrodispersión del objeto y además de la distancia de éste a la antena, lo que agregará, a lo anteriormente mencionado, más complejidad aún para la interpretación de estas imágenes.

Cuando el radar ilumina la superficie terrestre, la mayor parte de este haz emitido se dispersa cuando entra en contacto con ella. Según la naturaleza del objeto sensado, este haz se dispersará hacia la atmósfera, por ejemplo en el caso de suelo, o se dispersará dentro del mismo objeto, por ejemplo si estamos en presencia de vegetación o se reflejará especularmente, por ejemplo si se trata del agua. Para cada uno de estos casos el radar registrará una señal de retorno diferente. Es decir, la rugosidad y la geometría del terreno son factores que influyen directamente en la señal de retorno detectada por el sensor.

A continuación daremos la ecuación del radar [FTUF82]:

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}$$

donde P_r : potencia retrodispersada, P_t : potencia emitida por el radar, G : ganancia de la antena, λ : longitud de onda, R : distancia entre el sensor y el terreno y σ : es la sección eficaz de retrodispersión.

Un factor muy importante de esta ecuación es el coeficiente de retrodispersión σ , ya que depende de la rugosidad del material y sus condiciones dieléctricas, las cuales inciden en la intensidad de la señal de retorno (mayor rugosidad implica mayor intensidad). Por otra parte, la geometría del terreno, pendientes y orientaciones del ángulo de incidencia ejercen un efecto muy importante sobre σ (a mayor ángulo, menor pulso de retorno). [OQ98], [Chu96]

Otro factor importante a tener en cuenta es la polarización, es decir la orientación del campo eléctrico de la radiación transmitida y recibida.

Por último, teniendo en cuenta las frecuencias utilizadas en radar, al igual que en el espectro óptico, se pueden distinguir diferentes bandas.

2.2 Geometría del SAR

La teoría básica de la geometría de SAR, más específicamente de un SLAR, se muestra en las figuras 2-2 y 2-3. Damos a continuación las definiciones de sus elementos más importantes.

1. Visión Lateral

Una plataforma desplazándose con velocidad V y altura h lleva una antena de radar de observación lateral que ilumina la superficie de la Tierra con pulsos de radiación electromagnética.

La zona rayada es la iluminada por la antena y la zona barrida por el radar al desplazarse es la franja cuyo ancho va desde el alcance cercano hasta el alcance lejano. El radar emite una sucesión de pulsos de radiación electromagnética y al captar la energía reflejada por la tierra obtiene una sucesión de ecos (retornos) con los que se generará la imagen.

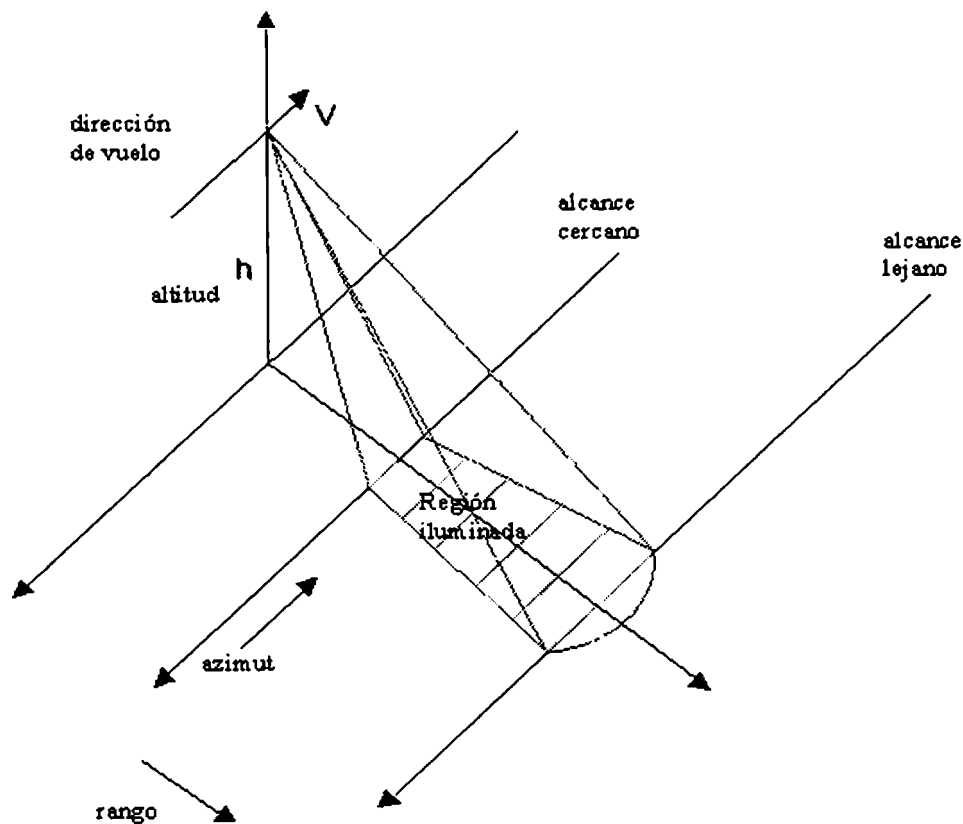


Figura 2-2: Geometría de formación de imágenes de radar

Por qué es necesaria la visión lateral?

Los retornos provenientes de los distintos puntos en el terreno en el caso de visión vertical, arribarán al mismo tiempo, en cambio, en la visión lateral lo harán a distintos tiempos. Este hecho permite distinguirlos entre sí y calcular su distancia al radar en la dirección perpendicular a la dirección de vuelo (rango).

2. Resolución en la dirección del Rango

La dirección del rango es la perpendicular a la dirección de vuelo.

El rango de un punto sobre la tierra puede ser medido como la distancia del mismo a la trayectoria de vuelo (Rango Oblicuo: *Slant Range*) o como la proyección de esta distancia

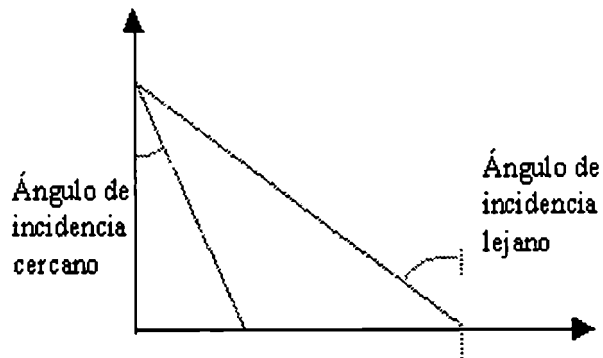


Figura 2-3: Geometría de formación de imágenes de radar (corte transversal)

sobre la tierra (Rango de Tierra: *Ground Range*).

Si el radar emite pulsos de duración τ , la resolución del mismo Δr_{min} queda determinada por la fórmula:

$$\Delta r_{min} = \frac{c\tau}{2}$$

donde c es la velocidad de la luz. Esta es la fórmula de la resolución en el rango oblicuo.

La resolución en el rango de tierra es:

$$\frac{\Delta r_{min}}{\sin\theta} = \frac{c\tau}{2\sin\theta}$$

donde θ es el ángulo de incidencia lejano.

3. Resolución en la dirección Azimutal.

Radar de Apertura Sintética vs. Radar de Apertura Real

El Radar de Apertura Sintética posee la ventaja de que la resolución azimutal es independiente de la distancia, y puede ser tan pequeña como:

$$\frac{L}{2}$$

donde L es la longitud de la antena.

Este hecho resulta paradójico a primera vista, ya que mejoramos la resolución reduciendo el largo de la antena y, por lo tanto, ensanchando el haz de radiación de la misma.

Esto ocurre porque, en el procesamiento que se le realiza a los pulsos captados por el radar, la posición de un punto sobre la tierra se determina en base a la historia de fase del mismo.

La historia de fase permite una mejor ubicación de la posición azimutal de un punto cuanto mayor sea su duración. Y esta duración es directamente proporcional al ancho del haz.

Durante el procesamiento de los pulsos captados por el radar, se sintetiza una antena de muy alta resolución. Además, durante este procesamiento, pueden sintetizarse varias pasadas sobre la misma región con un solo juego de datos.

Las imágenes generadas por dichas pasadas corresponden a antenas sintéticas que observan la región desde ángulos ligeramente diferentes entre sí y son estadísticamente independientes. A cada una de estas imágenes se la denomina un *look*. Al promediarlas entre sí se genera una sola imagen *multilook* la cual es de mas fácil interpretación visual gracias a la reducción del fenómeno de speckle respecto de una imagen ordinaria (de un solo *look*).

En el RAR la resolución azimutal está limitada por:

$$\frac{h\lambda}{L \cos \theta}$$

donde h es la altura de vuelo, λ la longitud de onda, y θ el ángulo de incidencia.

Vemos que para tener mejor resolución a una longitud de onda λ fija debemos reducir h y aumentar L . (es decir, vuelo bajo y antena grande).

Ejemplificando, si $\lambda = 5.6cm$, $h = 800km$ y $\theta = 23^\circ$, para obtener una resolución mínima de 5 mts., en el caso del SAR es necesaria una antena de 10 mts. de longitud, y en el caso del RAR es necesaria una antena de 9.8 km de longitud

4. Ángulo de incidencia

Es el ángulo con el que incide la radiación sobre la tierra. En la geometría de formación

banda	límites (GHz)		límites (cm)	
P	-	0.39	30.00	100.00
L	0.39	1.55	15.00	30.00
S	1.55	3.90	7.50	15.00
C	3.90	5.75	3.75	7.50
X	5.75	10.9	2.40	3.75
Ku	10.90	36.0	1.67	2.40
K			1.10	1.67
Ka			0.75	1.10

Tabla 2.1: Bandas de frecuencia de radar

de imágenes de radar tiene una gran influencia el relieve dado que modifica el ángulo local de incidencia.

Dependiendo de la altura del radar sobre la superficie de la tierra, el ángulo de incidencia variará desde el alcance cercano al alcance lejano, lo que a su vez influye en la geometría de la observación. Una imagen de radar por satélite proporcionará un ángulo de incidencia más uniforme a lo largo del barrido que un radar transportado en un avión.

Las sombras en las imágenes de radar indican las zonas de la superficie del terreno no iluminadas por el radar. Puesto que no se recibe ninguna señal de retorno, las sombras aparecen en tonos muy oscuros en la imagen. Las sombras siguen el sentido del alcance inclinado, por detrás de los objetos que son verticales o que tienen laderas pronunciadas y son un buen indicador de la dirección de iluminación del radar.

Debido a que el ángulo de incidencia aumenta desde el alcance cercano al lejano, la iluminación del terreno resulta más oblicua. Por lo tanto, el sombreado se hace más pronunciado hacia el alcance lejano. Información sobre la altura del objeto sensado se puede obtener a partir de las sombras.

2.3 Parámetros del Sistema

La frecuencia de la onda electromagnética emitida por la antena del radar se denomina frecuencia de emisión. En la tabla (2.1) puede verse la lista de rangos de frecuencia.

Polarización

La radiación emitida por el radar es polarizada, esto significa que el vector campo eléctrico tiene una dirección determinada, que puede ser vertical, horizontal (respecto del plano de la tierra) o tener ambas componentes. Al ser "reflejada", la radiación experimenta, en general, una rotación del vector campo eléctrico. Entonces se debe decidir si se capta la componente horizontal del mismo, la vertical o ambas. Por lo tanto existen 4 posibilidades: HH, HV, VH y VV.

Actualmente, en los radares transportados por satélite, se envía una sola componente y se recibe también una sola.

Velocidad y pulsos/segundo

De la velocidad de desplazamiento del radar y de la cantidad de pulsos por segundo que éste emita, depende el espaciamiento entre las líneas de la imagen generada.

Swath

Es el ancho de la zona barrida por el radar y corresponde al ancho de las imágenes que genera.

2.4 Coeficiente de Backscatter σ^o

El coeficiente de *backscatter* (coeficiente de retrodispersión) o también llamado *Radar Cross Section*, está definido como la razón entre la energía que hubiera tenido el sensor si la misma hubiera sido totalmente dispersada en forma isotrópica y la energía recibida por el sensor. Llamemos a la primera E_1 y a la segunda E_2 , entonces:

$$\sigma^o = \frac{E_1}{E_2}$$

Usualmente se expresa el cociente anterior en decibeles, por lo que finalmente queda:

$$\sigma^o = 10 \log \frac{E_1}{E_2}$$

Influencia de la Constante Dieléctrica

La constante dieléctrica de los materiales es una cantidad compleja

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$$

donde la componente imaginaria ϵ'' es la responsable de la absorción de energía.

Para una onda electromagnética propagándose en un medio homogéneo, el vector campo eléctrico E en función de la distancia recorrida x está dado por la siguiente fórmula:

$$E = E_0 e^{i\sqrt{\epsilon}kx}$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, si $\epsilon' \ll \epsilon''$ podemos escribir

$$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon'} + \frac{i\epsilon''}{2\sqrt{\epsilon'}}$$

obteniendo

$$E = E_0 e^{-\alpha_a x} e^{i\sqrt{\epsilon'}kx}$$

donde

$$\alpha_a = \frac{\pi\epsilon''}{\lambda\sqrt{\epsilon'}}$$

y la potencia de la onda es:

$$P(x) = P(0)e^{-2\alpha_a x}$$

Se define la profundidad de penetración L_p como la longitud que debe recorrer la onda para que su potencia decaiga a $P(0)e^{-1}$, o sea:

$$L_p = \frac{1}{2\alpha_a} = \frac{\lambda\sqrt{\epsilon'}}{2\pi\epsilon''} \quad (2.1)$$

Se define la tangente de pérdidas δ como $\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$, reemplazando este valor en la ecuación (3.5) obtenemos

$$L_p = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\epsilon'} \tan \delta} \quad (2.2)$$

De la ecuación (2.2) se desprende un hecho importante: la penetración aumenta con la longitud de onda. Por otro lado, la tangente de pérdidas δ aumenta con la humedad, por lo tanto la penetración disminuye con la humedad

Influencia de la Polarización

El σ° depende de la polarización de la onda incidente y de la componente de polarización detectada por el sensor. Una superficie queda caracterizada (para una frecuencia y un ángulo de incidencia dados) por una matriz de cuatro coeficientes de backscatter:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{HH} & \sigma_{HV} \\ \sigma_{VH} & \sigma_{VV} \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes σ_{ID} (con $I, D = H$ o V) corresponden al caso en que la onda incidente posee una polarización I y la onda dispersada una polarización D .

Entonces, una misma zona puede dar cuatro imágenes distintas, correspondientes a los modos HH , HV , VH y VV . (ver sección 2.5)

Una cubierta vegetal con elementos verticales interactuará fuertemente con un campo incidente con polarización vertical, mientras que lo hará débilmente con un campo de polarización horizontal. Por lo tanto, la penetración será mayor en el segundo caso que en el primero.

Influencia del Ángulo de Incidencia

El σ° depende del ángulo de incidencia. Con ángulos de incidencia bajos la distribución de pendientes influye fuertemente, mientras que con ángulos grandes lo que domina es la estructura de pequeña escala.

Cada tipo de superficie puede caracterizarse por su respuesta a los distintos ángulos de incidencia (signatura angular).

Speckle

Dentro de cada pixel, existen muchos elementos dispersores. La suma de la respuesta de cada uno de ellos determina el valor de gris del pixel.

Cada una de estas respuestas es una senoidal con amplitud y corrimiento de fase dependientes del elemento retrodispersor y de la distancia del mismo al radar.

Si variamos la distancia del radar, todos los corrimientos de fase cambiarán y el resultado será distinto.

El voltaje del i – *ésimo* dispersor se puede expresar como:

$$V_i e^{j(\omega t + \theta_i)} = V_i e^{j\phi_i}$$

donde V_i es su magnitud y $\phi_i = \omega t + \theta_i$ es la fase instantánea. De esta manera se puede escribir el voltaje instantáneo de la colección de N_s dispersores como:

$$V = \sum_{i=1}^{N_s} V_i e^{j\phi_i}$$

y que puede ser expresando en términos de su módulo V_e y de su fase ϕ

$$V = V_e e^{j\phi}$$

donde

$$\begin{aligned} V_x &= V_e \cos \phi = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \cos \phi_i \\ V_y &= V_e \sin \phi = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \sin \phi_i \end{aligned}$$

como se ve en la figura 2-4.

La magnitud del campo eléctrico total recibido por la antena es representado por la variable aleatoria E_e y es convertida por el detector en tensión. Hay dos tipos de detectores: el lineal y el cuadrático que serán tratados a continuación.

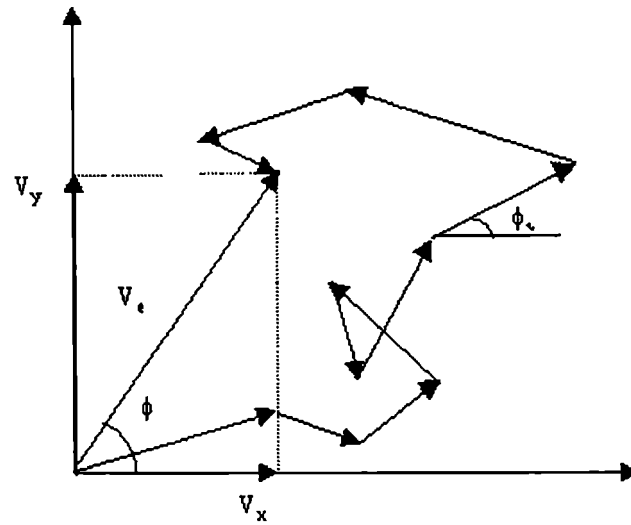


Figura 2-4: Suma de N_s de fasores elementales de módulo y fase aleatorias. (pág. 477, Ulaby et al. 1982)

Detector Lineal

La señal recibida por el radar sufre una transformación lineal y su salida es la magnitud V_e la cual es proporcional al campo eléctrico de entrada E_e , es decir $V_e = kE_e$, con k constante del sistema. Si N_s es grande y los V_i y los ϕ_i son independientes, con ϕ_i uniformemente distribuidos entre 0 y 2π , entonces V_e posee una distribución de Rayleigh, cuya función de densidad es:

$$f_{V_e}(V_e) = \frac{V_e}{s^2} e^{-\frac{V_e^2}{2s^2}}$$

con $V_e \geq 0$ y ϕ con distribución uniforme en $[0, 2\pi]$:

$$f_{\phi}(\phi) = \frac{1}{2\pi}$$

La media de V_e puede ser considerada como la señal que se quiere detectar (escena). Sobre esta componente existe una señal fluctuante que puede ser considerada como ruido que la contamina.

Se puede demostrar fácilmente que la esperanza de V_e es:

$$E(V_e) = \overline{V_e} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}s$$

y que la media de la potencia es:

$$E(V_e^2) = \overline{V_e^2} = 2s^2$$

Tendremos entonces la potencia de la componente ruido que se expresa como la varianza de V_e , la denotaremos $\overline{V_{ruido}^2}$ y está dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} Var(V_e) &= \overline{V_{ruido}^2} = \overline{(V_e - \overline{V_e})^2} = \overline{V_e^2} - (\overline{V_e})^2 = \\ &= 2s^2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}s\right)^2 = 0.429s^2 \end{aligned}$$

por lo tanto la relación señal-ruido equivalente será:

$$SNR_{eq} = \frac{(\overline{V_e})^2}{\overline{V_{ruido}^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}s^2}{0.429s^2} = 3.66$$

lo que equivale a 5.6 dB, donde este valor de SNR_{eq} es inherente a la distribución *Rayleigh*. Notar que esta relación sólo tiene en cuenta la degradación debida al speckle.

Detector Cuadrático

Si el detector utilizado es cuadrático en vez de lineal, como en el caso anterior, la respuesta del detector es la potencia de la tensión V_e^2 y por lo tanto, la distribución de la tensión (que es *Rayleigh*) es convertida en una distribución de potencia resultando una Exponencial. Como V_e^2 es proporcional a la potencia recibida podemos escribir:

$$P = V_e^2$$

Puede deducirse que la distribución de P tiene la siguiente función de densidad:

$$f(P) = \frac{1}{2s^2} e^{-\frac{P}{2s^2}}, P \geq 0 \quad (2.3)$$

que es una distribución Exponencial cuya esperanza es:

$$E(P) = \bar{P} = 2s^2 \quad (2.4)$$

donde $E(P)$ es la potencia media de la señal real (escena). Utilizando las ecuaciones (2.3) y (2.4) se obtiene:

$$f(P) = \frac{1}{\bar{P}} e^{-\frac{P}{\bar{P}}}, P \geq 0$$

de donde se obtiene el valor cuadrático de la potencia de la señal observada (pixel)

$$E(P^2) = \overline{P^2} = \int_0^\infty \frac{P^2}{\bar{P}} e^{-\frac{P}{\bar{P}}} dP = 2\bar{P}^2$$

Luego, análogamente al caso del detector lineal, se obtiene la varianza de la potencia de la señal observada:

$$E((P - \bar{P})^2) = \overline{(P - \bar{P})^2} = \overline{P^2} - (\bar{P})^2 = 2\bar{P}^2 - \bar{P}^2 = \bar{P}^2$$

y la desviación standard será:

$$\sigma_P = \sqrt{Var(P)} = \bar{P}$$

por lo tanto, la desviación standard es igual al valor medio.

Podemos concluir que:

- ambas distribuciones, Rayleigh y Exponencial, poseen un sólo parámetro.
- la desviación standard y el valor medio están relacionados y esta relación es lineal.
- si se considera una muestra aislada de una variable con distribución Rayleigh o con distribución Exponencial tiene poca probabilidad de que ésta esté cerca del valor medio.
- en el caso Exponencial, el valor que se halla a una desviación standard por debajo del valor medio es el origen de coordenadas, mas allá del cual la función vale cero. Se ve que la idea de que un porcentaje de los casos cae dentro de $\pm n$ desviaciones a partir del valor medio carece de sentido.
- $\overline{V_e}$ y σ_{V_e} para la detección lineal y \overline{P} y σ_P para la detección cuadrática se deben obtener sobre áreas estadísticamente homogéneas de la imagen, es decir, áreas en las que el *backscatter* considerado es prácticamente constante.

Disminución del Speckle Utilizando Varios Looks

Durante el procesamiento de los datos recogidos por el radar, pueden obtenerse varias imágenes de una misma región, cada una de ellas representa un *look*.

Estos looks son promediados, es decir, se genera una imagen Y tal que el valor de cada uno de sus pixels se obtiene de la siguiente forma:

$$y_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{i,j}^k \quad (2.5)$$

donde N es la cantidad de imágenes (*looks*) a promediar, $y_{i,j}$ es el pixel i, j de la imagen resultante y los $x_{i,j}^k$ son los módulos de los pixels i, j del k -ésimo look.

Hay que recordar que para cada *look* individual, los pixels son cantidades complejas. En la imagen Y resultante, se pierde la información de fase y su distribución ya no será Rayleigh o Exponencial sino que se aproximará a una distribución Gaussiana a medida que aumenta N . Para dicha variable Y , la desviación standard será pequeña comparada con el valor medio, lo que remedia parcialmente los problemas inherentes al fenómeno de speckle.

Esta mejora tiene un costo: la resolución espacial disminuye.

Debido a la forma en la que son generados los diferentes looks, los $x_{i,j}^k$ para un mismo pixel i, j y diferentes looks (diferente k) resultan variables aleatorias estadísticamente independientes.

Si llamamos V_e^k al valor $x_{i,j}^k$ de un pixel i, j genérico, la ecuación (2.5) puede reescribirse como:

$$V_{e_N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V_e^k$$

Hemos visto que:

$$\overline{V_e} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} s \quad (2.6)$$

por otro lado, la varianza de N muestras estadísticamente independientes e idénticamente distribuidas es igual a la varianza de cada una de ellas dividida por N .

$$Var(V_{e_N}) = \overline{V_{e_N}^2} = \frac{\overline{V_e^2}}{N} = \frac{0.429s^2}{N} \quad (2.7)$$

entonces, de las ecuaciones (2.6) y (2.7) se obtiene:

$$\overline{V_{e_N}^2} = \frac{2V_e^2}{\pi} \frac{0.429}{N}$$

y la desviación standard será:

$$\sigma_{V_{e_N}} = \sqrt{\overline{V_{e_N}^2}} = \frac{0.523V_e}{\sqrt{N}}$$

En síntesis, al generar una imagen multilook se reduce el fenómeno de *speckle* pero se reduce también la resolución espacial y se pierde información de fase.

Una herramienta estadística a tener en cuenta para caracterizar la relación señal ruido es el coeficiente de variación definido como la razón entre la desviación estándar y la media, $C_V = \frac{\sigma}{\mu}$. Si se considera a C_V en función del número de looks, cuando éste aumenta el valor del C_V disminuye, lo que implica que disminuye el ruido. Dado que para 1 *look* vale:

$$C_V = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} = 0.5227$$

entonces para N *looks* será:

$$C_{V_N} = \frac{C_V}{\sqrt{N}}$$

Entonces para la detección lineal se puede estimar el número de *looks* como el número equivalente de *looks* (ENL):

$$N \sim ENL = \frac{4 - \pi}{\pi} \left(\frac{1}{C_V} \right)^2$$

y para la detección cuadrática será:

$$N \sim ENL = \left(\frac{1}{C_V} \right)^2$$

2.5 Formatos de imágenes SAR

En esta tesis se estudiará en detalle el uso de modelos estadísticos para imágenes SAR en formato de amplitud multilook siendo que, en principio, sería posible trabajar con otros formatos. En esta sección serán descritos brevemente los formatos posibles para imágenes SAR, y será justificada la opción por el formato de amplitud multilook.

Como ya dijimos, las imágenes SAR se forman a partir de señales electromagnéticas inherentemente bidimensionales, y para cada configuración de emisión (horizontal o vertical) esas señales pueden captarse en polarización horizontal o vertical. La imagen polarimétrica σ está

formada por una matriz de tamaño 2×2 tal como la que se muestra a continuación

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{HH} & \sigma_{HV} \\ \sigma_{VH} & \sigma_{VV} \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_{i,j}$ denota la imagen compleja en la frecuencia considerada que fue enviada en la polarización $i \in \{H, V\}$ y recibida en la polarización $j \in \{H, V\}$.

Tal como se ha visto en [OQ98], para la gran mayoría de los blancos (para todos los blancos naturales, en particular) las señales σ_{HV} y σ_{VH} son idénticas a menos del ruido térmico y, por ende, una de ellas puede despreciarse sin que haya pérdida de información. Siendo así, se puede trabajar con la matriz reducida

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde σ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ denota HH , HV y VV en cualquier orden conveniente, y recordando que cada una de estas componentes es un vector complejo. Las propiedades estadísticas del vector \mathbf{Z} , para áreas con poca rugosidad relativa a los parámetros del sensor, fueron caracterizadas por Goodman (ver [Goo76]) y llamadas “distribución normal compleja”.

Este formato presenta varios inconvenientes para su uso directo en las aplicaciones, siendo los más notables su nivel de ruido y el hecho de que diferentes tipos de blancos se diferencian por la varianza (conviene recordar que el sistema visual humano es menos sensible a variaciones de la dispersión —varianza— que a variaciones del brillo —media).

Una de las técnicas más empleadas para mitigar el ruido, que dificulta tanto la interpretación visual como la automática de las imágenes, es el procesamiento multilook que consiste en la reducción de la varianza del mismo a través del promedio de muestras. Estas muestras pueden obtenerse de varias maneras pero, para fines de visualización, basta imaginar que el sensor captura varias imágenes de la misma escena a intervalos infinitesimalmente pequeños de tiempo (lo suficientemente pequeños para que la señal verdadera no cambie) y que se realiza el promedio

de las mismas. En la práctica, se define la matriz de covarianza

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \mathbf{Z}(\ell) \mathbf{Z}^{*T}(\ell),$$

donde cada una de las n observaciones (*looks*) se denota $\mathbf{Z}(\ell)$, \mathbf{Z}^* denota el complejo conjugado de \mathbf{Z} y \mathbf{Z}^T denota la transpuesta de \mathbf{Z} .

Bajo la hipótesis de que \mathbf{Z} obedece la distribución normal compleja vale que $\mathbf{A} = n\mathbf{Z}^{(n)}$ obedece la distribución de Wishart, de uso bastante común en análisis multivariado. Una forma bastante frecuente de organización de la matriz \mathbf{A} se muestra a seguir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n \|\sigma_{HH}(\ell)\|^2 & \sum_{\ell=1}^n \sigma_{HH}(\ell) \sigma_{HV}(\ell) & \sum_{\ell=1}^n \sigma_{HH}(\ell) \sigma_{VV}(\ell) \\ \sum_{\ell=1}^n \sigma_{HH}(\ell) \sigma_{HV}(\ell) & \sum_{\ell=1}^n \|\sigma_{HV}(\ell)\|^2 & \sum_{\ell=1}^n \sigma_{HV}(\ell) \sigma_{VV}(\ell) \\ \sum_{\ell=1}^n \sigma_{HH}(\ell) \sigma_{VV}(\ell) & \sum_{\ell=1}^n \sigma_{HV}(\ell) \sigma_{VV}(\ell) & \sum_{\ell=1}^n \|\sigma_{VV}(\ell)\|^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

A los datos presentados en la forma de la matriz \mathbf{A} fórmula (2.9), se los llama “polarimétricos”, y es conveniente recordar que para cada coordenada de la imagen habrá tantas matrices polarimétricas como frecuencias de trabajo disponga el sensor. Evidentemente hay redundancia en esta matriz, por lo que pueden descartarse los tres elementos que están arriba de la diagonal principal.

Aunque una imagen en formato polarimétrico retiene toda la información captada por el sensor, a la vez que presenta reducción de ruido si $n > 1$, el volumen de datos puede ser prohibitivo. En algunas aplicaciones no son raras imágenes de 40000×10000 pixels, y si para cada pixel deben almacenarse seis valores reales que, en la mejor de las hipótesis, requieren cuatro bytes cada uno (en algunas situaciones llegan a almacenarse en variables de precisión dupla, ocupando ocho bytes). Para esta situación serían necesarios $40000 \times 10000 \times 6 \times 4 = 9.6 \cdot 10^9$ bytes para una única frecuencia, siendo que la tendencia actual es trabajar con varias frecuencias simultáneamente.

Muchas veces, por limitaciones de capacidad de almacenamiento, por la alta redundancia de la información presente en las componentes de la matriz 2.9 o por limitaciones de generación y procesamiento de imágenes, es necesario descartar parte de estos datos. Cuando ésto ocurre, los

candidatos a sobrevivir son los elementos de la diagonal principal y, en más de una situación, el usuario deberá conformarse con una única de estas componentes para trabajar.

Supongamos el caso de un usuario que trabajará con, digamos, la componente $\sum_{\ell=1}^n \|\sigma_{HH}(\ell)\|^2(u)$, donde $u = (x, y)$ denota la coordenada de la imagen y que los datos le llegan en formato entero. Este formato se utiliza porque ocupa la mitad de espacio que el formato de punto flotante, esto es, el valor observado en cada pixel estará almacenado en una variable que ocupa dos bytes y, así siendo, puede trabajarse con $2^{16} = 65536$ valores diferentes pero el ojo humano apenas puede distinguir algunas decenas de tonos de gris diferentes, por lo que muchas veces es deseable reducir aún más el tamaño de la imagen con la que se trabaja. Podría pasarse directamente, por cuantización, de dos a un byte pero se perdería mucha información. Es más conveniente reducir el rango dinámico de los datos antes de hacer esta operación, y la forma más frecuente de realizarlo es aplicando la raíz cuadrada antes de la cuantización.

A los datos así procesados se los llama “en amplitud”, ocupan un único byte por pixel y se los visualiza como 256 valores de gris diferentes, yendo de 0 (usualmente mostrado como negro) a 255 (usualmente mostrado como blanco). De esta forma, la imagen que antes ocupaba $9.6 \cdot 10^9$ bytes requerirá, en este formato, $40000 \times 10000 = 400 \cdot 10^6$ bytes, esto es, una reducción de casi veinticinco veces.

El formato de imágenes en amplitud multilook es el más divulgado en la comunidad de usuarios de percepción remota siendo los otros (polarimétrico e intensidad) más específicos, de difícil acceso y de mucho mayor costo, por lo que quedan restringidos a aplicaciones muy particulares y/o a laboratorios de investigación especializados.

Es conveniente notar que, aunque parezca un contrasentido, no es posible pasar del formato de amplitud al formato de intensidad, puesto que la cuantización es una operación no inversible. Ésta es la razón por la cual esta tesis se concentra en el uso de modelos para datos de amplitud, sin recurrir al artificio de transformarlos al dominio de la intensidad, con lo que algunos procedimientos serían simplificados pero con lo que se incurriría, en la práctica, en la desvirtuación de las características intrínsecas de los datos.

Se muestra en la figura 2-5 una imagen SAR con los tres formatos: complejo (parte real e imaginaria), amplitud e intensidad.

Lo que se ha visto en este capítulo nos lleva a resaltar la importancia de caracterizar los

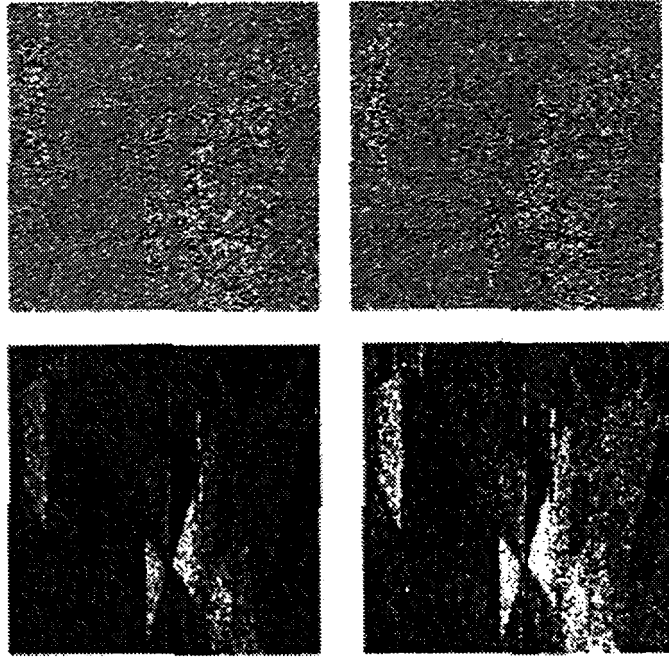


Figura 2-5: Tres formatos para una misma escena: compleja (real e imaginaria, arriba), amplitud (abajo izquierda) e intensidad (abajo derecha) (pág. 86, Understanding Synthetic Aperture Radar Images. C.Oliver and S. Quegan)

datos SAR estadísticamente y que los modelos aquí utilizados no son los que modelan datos de imágenes generadas a partir de sensores ópticos. Recordemos que en estos últimos los modelos que se utilizan son Gaussianos y con ruido aditivo que resultan más tratables desde el punto de vista teórico y computacional. Los modelos de SAR dependerán del *backscatter* y por lo tanto de la rugosidad y la textura de las imágenes generadas, siendo el ruido *speckle* multiplicativo, no gaussiano dependiendo de la detección utilizada y del número de looks con que fue generada la imagen. De ahí la importancia del estudio del comportamiento de otras distribuciones que se tratarán en el Capítulo 3.

Capítulo 3

Distribuciones para Imágenes SAR

Las imágenes de Sensoramiento Remoto generadas a partir de datos obtenidos mediante Radar de Apertura Sintética (SAR) proveen valiosa información sobre recursos naturales tales como hielo marino, glaciares, superficie forestal, ríos y lagos. A partir de estos datos también es posible evaluar efectos de la acción del hombre tales como deforestación, cultivos, embalses, siendo también de gran importancia en el estudio de corrientes marinas.

Las imágenes satelitales y aéreas generadas mediante SAR han generado gran interés ya que poseen varias ventajas sobre las generadas por sensores ópticos y casi-ópticos convencionales:

- Independencia de la luz solar: pueden ser adquiridas tanto de noche como de día
- Independencia de la existencia de nubes: la radiación electromagnética a las frecuencias de operación de los SAR atraviesa las nubes sin atenuación.
- Disponibilidad: de las dos razones anteriores se deduce que su adquisición en una fecha determinada está casi asegurada.

Es necesario mencionar también que las imágenes SAR poseen desventajas tales como:

- Dificil interpretabilidad: se necesitan sólidos conocimientos y gran entrenamiento para realizar la interpretación visual de las mismas.
- Dificil procesamiento: las características estadísticas de las imágenes SAR hacen que, los métodos habituales para clasificación y restauración, utilizados en imágenes provenientes de sensores ópticos y casi-ópticos, no den buenos resultados en las mismas

De lo anterior surge la necesidad de estudiar modelos matemáticos para las imágenes SAR, los cuales permitirán mejores clasificaciones y restauraciones.

El modelo multiplicativo es conveniente para explicar las características estadísticas de la imagen de un objeto cuando es iluminado por radiación coherente, tal como la proveniente de un radar.

Este modelo afirma que, con ciertas restricciones, la interferencia constructiva y destructiva de las señales incidente y reflejada dan un retorno que varía, en forma aleatoria, proporcionalmente con la media del *backscatter* o retrodispersión del blanco iluminado.

Matemáticamente, el retorno multilook en amplitud puede ser modelado como el producto de dos variables aleatorias independientes: una correspondiente al *backscatter* y la otra correspondiente al ruido inherente a las imágenes generadas mediante iluminación coherente llamado *speckle*. Dependiendo de las distribuciones con que se modelan el *backscatter* y el *speckle* se obtendrán diferentes distribuciones para el retorno.

Los parámetros de estas distribuciones nos proporcionan información acerca de la rugosidad y textura de la imagen [UKBW86] y en consecuencia, nos interesará conocer cómo se comportan para los modelos propuestos. Esto será de gran importancia para la clasificación y restauración de imágenes SAR. Por este motivo la estimación de los parámetros de las diferentes distribuciones resultantes para el retorno juega un papel de gran importancia en este trabajo. Diferentes estimadores se proponen para estimar los parámetros de rugosidad y de escala dejando fijo el número de looks.

El modelo multiplicativo ha sido muy utilizado en el procesamiento de imágenes de radar de apertura sintética. Este modelo establece que el retorno resulta del producto entre el ruido *speckle* y el *backscatter* del terreno.

3.1 Modelo estadístico de las imágenes SAR

Una imagen generada con un sistema de iluminación coherente, tal como es el sistema SAR, está afectada por la interferencia constructiva y destructiva de las señales incidente y reflejada [Goo76]. Esta interferencia causa una fluctuación en la intensidad detectada de una celda de resolución a otra, aún cuando sean idénticas, y da un retorno que varía en forma aleatoria,

proporcionalmente con la media del backscatter o retrodispersión del blanco. Este efecto se lo denomina ruido *speckle* y da a la imagen una apariencia granulada tal como se puede ver en la figura 3-1



Figura 3-1: Imagen E-SAR de la zona de Gilching, donde se observa el efecto granulado a causa del ruido *speckle*.

Debido a la naturaleza del ruido *speckle*, las imágenes SAR no pueden ser analizadas sobre la base de un sólo pixel, sino que es necesario hacer un análisis basado en estimaciones estadísticas sobre regiones de la imagen. Por lo tanto, para el diseño de algoritmos, como por ejemplo los algoritmos para discriminar distintos tipos de cobertura terrestre, es necesario un total entendimiento de las propiedades estadísticas de las imágenes SAR y, en particular, el conocimiento del efecto del *speckle* sobre las mismas.

Tal como ya se anticipó, las imágenes generadas con sistemas de iluminación coherente no deben ser modeladas como imágenes ruidosas con ruido aditivo Gaussiano. Un modelo exitoso para este tipo de imágenes es el que utiliza ruido multiplicativo no Gaussiano. El modelo multiplicativo es utilizado para explicar datos que han sido generados con un sistema de iluminación coherente. Este modelo supone que el retorno (cantidad observada) es el resultado del producto de dos variables aleatorias independientes, una de ellas es la que modela el *backscatter* (propiedades intrínsecas) del terreno y la otra modela el ruido *speckle* (debido a la modalidad

de obtención de la imagen).

Un modelo universalmente aceptado para el ruido *speckle* consiste en suponer que éste, en cierto formato que será descrito más adelante, obedece la distribución Gaussiana compleja. De esta distribución, para otros formatos, devienen las distribuciones Gamma y raíz cuadrada de Gamma, siendo esta última la que más nos interesará en este trabajo.

Se pueden utilizar diferentes distribuciones para modelar el *backscatter*. Esta elección dependerá de cuál sea el grado de homogeneidad presente en las imágenes. Las áreas urbanas, áreas de bosque y áreas de pastizales tienen un grado de homogeneidad decreciente y para cada uno de estos tipos de datos habrá una clase de distribuciones que los ajusta mejor.

Las distribuciones \mathcal{K} (ver [JT87]) han sido muy utilizadas en este tipo de datos generados por un sistema de iluminación coherente, en particular para imágenes SAR [Oli91]. Estas distribuciones eran consideradas bastante generales, hasta la propuesta de [FMYS97].

En general, se ha propuesto como modelo del retorno de áreas no homogéneas a la distribución \mathcal{K}_A y a la distribución raíz cuadrada de Gamma $\Gamma^{1/2}$, que es un caso particular de la anterior, para áreas homogéneas. Sin embargo, las distribuciones \mathcal{K} no modelan bien los datos provenientes de áreas muy heterogéneas. Dada la necesidad de hallar un modelo para datos extremadamente heterogéneos, Frery et al [FMYS97] propusieron una nueva clase de distribuciones, las distribuciones \mathcal{G} , que cumplen con estas expectativas. Siendo las distribuciones \mathcal{K} , un caso particular de esta clase de distribuciones, los autores proponen como otro caso particular de la clase de las distribuciones \mathcal{G} , las llamadas distribuciones \mathcal{G}^0 . Estas últimas son de gran importancia, pues modelan muy bien los datos extremadamente heterogéneos, como lo son por ejemplo los datos que provienen de áreas urbanas y que en particular no se pueden modelar con las distribuciones \mathcal{K} .

Para analizar esta propuesta y sus consecuencias basta restringir la discusión a los modelos de *backscatter*, ya que en todos los casos la distribución para el *speckle* es la misma. Los casos particulares se dan através de restricciones sobre el único espacio de parámetros, el espacio de parámetros de la distribución raíz cuadrada de la de la Gaussiana inversa generalizada $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$, que se propone como modelo general para el *backscatter*.

En las próximas secciones se tratarán con detalles las principales propiedades de las distribuciones mencionadas, en el contexto de lo que cada una de ellas modela.

3.1.1 Speckle

El ruido *speckle* complejo, para 1 *look*, se supone tener distribución normal bivariada, cuyas componentes, real e imaginaria, son independientes e idénticamente distribuídas con media 0 y varianza 1/2, que denotaremos $\mathcal{N}_C(0, 1/2)$. Llamando Y_C a la variable aleatoria correspondiente al *speckle* complejo, se tiene que $Y_C = (Y_{\Re}, Y_{\Im}) \sim \mathcal{N}_C(0, 1/2)$. El *speckle* Y_I de n *looks* para intensidad, será el promedio sobre n muestras independientes de $Y_I = \|Y_C\|^2$ que tendrá una distribución Gamma y denotaremos $\Gamma(n, n)$. Para datos de amplitud A , recordando que $A^2 = I$, es decir que la amplitud al cuadrado es la intensidad, se tendrá una distribución raíz cuadrada Gamma y la denotaremos $\Gamma^{1/2}(n, n)$.

Usualmente se supone que el *speckle* tiene distribución raíz cuadrada de Gamma, $\Gamma^{1/2}$, con media unitaria y un parámetro n relacionado al procesamiento, que es el número equivalente de *looks*. Bajo estas hipótesis, la función de densidad que caracteriza a este ruido *speckle* para datos de amplitud, Y_A , es

$$f_{Y_A}(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2} \quad n, y > 0. \quad (3.1)$$

La figura 3-2 muestra tres densidades de la raíz cuadrada de Gamma correspondientes a $n = 1, 2, 4$. De esta figura se desprende que la densidad es más simétrica mientras mayor es el número de *looks*, hecho que se mostrará en la sección 3.2.3 donde se presentan varias medidas importantes de esta distribución. De esta observación surge la justificación de que, en algunas aplicaciones prácticas, pueda modelarse el *speckle* con la distribución Gaussiana cuando el número de *looks* es relativamente grande. Otra observación es que la varianza también disminuye con n y, por lo tanto, técnicas de procesamiento que aumentan drásticamente la calidad de la imagen aumentando el número equivalente de *looks* (como es el caso del filtrado utilizando *simulated annealing* [OQ98]) permitirían modelar el *speckle* a través de la distribución constante, ésto es, se puede despreciar el efecto de este ruido.

En este trabajo se le dará especial énfasis al caso $n = 1$, por ser éste el que más se desvía de la hipótesis Gaussiana y, por lo tanto, ser el que más atención requiere. Debe notarse que éste es el menor número de *looks* existente, y que imágenes con este nivel de procesamiento son

las que naturalmente ofrecen mayor resolución espacial (una de las formas de hacer crecer el número equivalente de looks es degradando la resolución espacial).

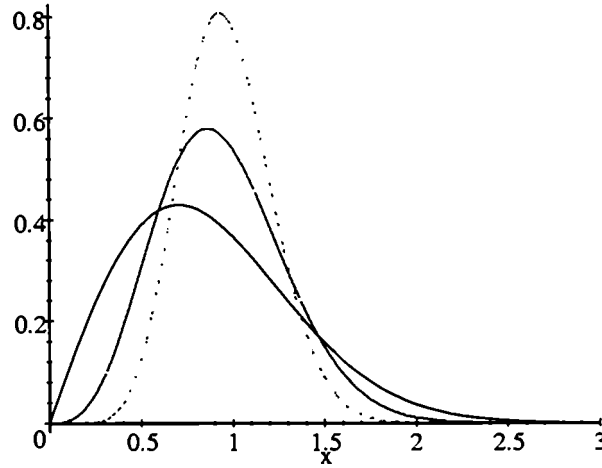


Figura 3-2: Funciones de densidad $\Gamma^{1/2}(n, n)$ del *speckle* para $n = 1, 2$ and 4 looks (sólido, cortado y punteado resp.)

3.1.2 Backscatter

El *backscatter* puede exhibir diferentes grados de homogeneidad y por lo tanto, teniendo en cuenta esta característica, se podría utilizar diferentes modelos. En general para datos de amplitud, dentro del modelo multiplicativo, se han utilizado dos modelos para el *backscatter* X_A : uno como una constante \mathcal{C} (cuando el área es homogénea) y el otro como una variable aleatoria distribuida raíz cuadrada de Gamma, denotémosla $\Gamma^{1/2}$ (cuando el área es heterogénea). En [FMYS97] se propone modelar el *backscatter* cuando el área es extremadamente heterogénea, como una variable aleatoria distribuida recíproca de la raíz cuadrada de Gamma, denotémosla $\Gamma^{-1/2}$. Estas tres situaciones para el *backscatter* junto con el modelo planteado para el *speckle* (3.1), quedan unificadas bajo la distribución de la raíz cuadrada de la gaussiana inversa generalizada $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$. En el esquema (3.2) se muestra las relaciones entre estas distribuciones, ver Apéndice E, donde D significa convergencia en distribución y Pr convergencia en

probabilidad.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda) & \xrightarrow{\Pr_{\alpha, \lambda \rightarrow \infty, \alpha/\lambda \rightarrow \beta_1}} & \boxed{\beta_1^{1/2}} \\
 & \xrightarrow{D_{\gamma \downarrow 0, \alpha, \lambda > 0}} & \text{Heterogénea} & & \text{Homogénea} \\
 \boxed{\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)} & & & & \\
 \text{General} & \xrightarrow{D_{\lambda \downarrow 0, -\alpha, \gamma > 0}} & +\text{Heterogénea} & & \text{Homogénea} \\
 & & \boxed{\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)} & \xrightarrow{\Pr_{-\alpha, \gamma \rightarrow \infty, -\alpha/\gamma \rightarrow \beta_2}} & \boxed{\beta_2^{-1/2}}
 \end{array} \tag{3.2}$$

Esta distribución es entonces propuesta como un modelo general del *backscatter* para datos de amplitud y en lo que sigue se mostrará cuál es el resultado del retorno en el modelo multiplicativo cuando se adopta esta distribución. Siendo la clase \mathcal{G} resultado del modelo multiplicativo para el retorno y además pudiendo obtenerse una fórmula cerrada para las densidades del retorno bajo el modelo multiplicativo, con los siguientes casos particulares:

- a) la distribución $\Gamma^{1/2}$, que lleva a la clase de distribuciones \mathcal{K} para el retorno
- b) la distribución $\Gamma^{-1/2}$ que lleva a la clase de distribuciones \mathcal{G}^0 para el retorno
- c) la distribución constante \mathcal{C} que lleva al speckle escalado para el retorno.

Es nuestra opinión que, desde el punto de vista de las aplicaciones, la contribución más importante es la clase de distribuciones \mathcal{G}^0 , que permite el modelado, no solamente de áreas homogéneas y heterogéneas sino de áreas extremadamente heterogéneas a diferencia de las distribuciones \mathcal{K} que no ajustan bien este tipo de datos. Las distribuciones \mathcal{G}^0 tiene tantos parámetros como las distribuciones \mathcal{K} y además sus funciones de densidad y distribución acumulada son más tratables teórica y computacionalmente.

3.1.3 Retorno

Bajo el modelo multiplicativo, el retorno para datos de amplitud, Z_A es una variable aleatoria que resulta del producto de dos variables independientes, el *backscatter* X_A y el *speckle* Y_A . Por lo tanto el retorno, como variable aleatoria tendrá una distribución que dependerá del modelo elegido para el *backscatter* y el *speckle*. Se tendrá, entonces, dos situaciones bien diferenciadas que son: el área bajo estudio es homogénea y el área bajo estudio no es homogénea. Dentro de la no homogeneidad se tendrán distintos grados, como ya se vió para el *backscatter*.

Bajo el modelo $Z_A = X_A Y_A$ con $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$, la clase de distribuciones \mathcal{G} modelan el

retorno Z_A cuando el backscatter tiene distribución $\mathcal{N}^{-1/2}$. La importancia de adoptar este modelo de backscatter es que además de lo que ya se expuso, se pueden obtener fórmulas cerradas para las densidades del retorno bajo el modelo multiplicativo, con los siguientes casos particulares:

- a) la distribución $\Gamma^{1/2}$, que lleva a la clase de distribuciones \mathcal{K} para el retorno
- b) la distribución $\Gamma^{-1/2}$ que lleva a la clase de distribuciones \mathcal{G}^0 para el retorno
- c) la distribución constante \mathcal{C} que lleva al speckle escalado para el retorno.

Se puede ver en el esquema (3.3) las relaciones, con respecto a la convergencia, entre las distribuciones propuestas para modelar el retorno (D es la convergencia en distribución y Pr es la convergencia en probabilidad).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)} & \xrightarrow{D_{\alpha, \lambda \rightarrow \infty, \alpha/\lambda \rightarrow \beta_1}} & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n/\beta_1)} \\
 & \xrightarrow{D_{\gamma \downarrow 0, \alpha, \lambda > 0}} & \text{Heterogéneos} & & \\
 \boxed{\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)} & & & & \text{Homogéneos} \\
 \text{General} & \xrightarrow{D_{\lambda \downarrow 0, -\alpha, \gamma > 0}} & +\text{Heterogéneos} & & \\
 & & \boxed{\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)} & \xrightarrow{D_{-\alpha, \gamma \rightarrow \infty, -\alpha/\gamma \rightarrow \beta_2}} & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n\beta_2)}
 \end{array} \quad (3.3)$$

Es nuestra opinión que, desde el punto de vista de las aplicaciones, la contribución más importante es la clase de distribuciones \mathcal{G}^0 , que permite el modelado, no solamente de áreas homogéneas y heterogéneas sino de áreas extremadamente heterogéneas a diferencia de las distribuciones \mathcal{K} que no ajustan bien este tipo de datos. Las distribuciones \mathcal{G}^0 tiene tantos parámetros como las distribuciones \mathcal{K} y además sus funciones de densidad y distribución acumulada son más tratables teórica y computacionalmente.

En el esquema (3.4) se muestra el retorno Z_A como resultado del producto del *speckle* Y_A con distribución raíz cuadrada de Gamma, con las diferentes opciones que toma el *backscatter* X_A

$$\begin{array}{ccccc}
X_A & \times & Y_A & = & Z_A \\
\boxed{\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)} & & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n)} & & \boxed{\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)} \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
\boxed{\Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)} & \boxed{\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)} & & & \boxed{\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)} \quad \boxed{\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)} \\
\downarrow & \downarrow & & & \downarrow \quad \downarrow \\
\boxed{\mathcal{C}(\beta_2^{-1/2})} & \boxed{\mathcal{C}(\beta_1^{1/2})} & & & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n\beta_2)} \quad \boxed{\Gamma^{1/2}(n, \frac{n}{\beta_1})}
\end{array} \tag{3.4}$$

Es conveniente dejar en forma organizada y con una notación unificada algunas de las propiedades estadísticas más importantes de las distribuciones anteriormente mencionadas. De esta manera, se presentarán desglosadas en las secciones siguientes las propiedades estadísticas más relevantes de estas distribuciones.

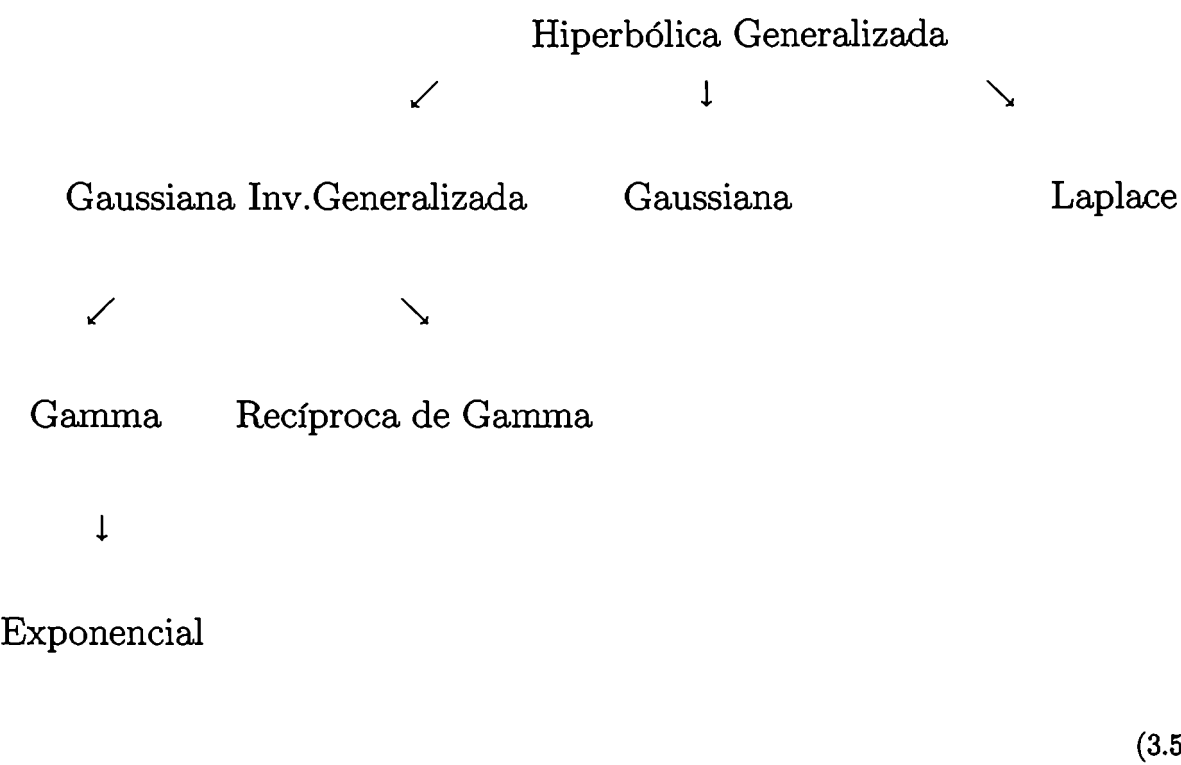
El caso particular $n = 1$ y $X_A \sim \mathcal{C}(\beta)$, ésto es, retorno con distribución $\Gamma^{1/2}(1, 1/\beta)$ también llamada distribución de Rayleigh, fue tratada extensamente en [Fre93] y [FS93].

3.2 Distribuciones

3.2.1 La distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$

La distribución Raíz Cuadrada Gaussiana Inversa Generalizada, $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$, es una transformación de un caso particular de las distribuciones hiperbólicas generalizadas y que han sido introducidas por Bandorff-Nielsen y Blæsild, ver [BNB81] y [BNB83] y están caracterizadas por el hecho de que las gráficas de los logaritmos de sus funciones de densidad son hipérbolas o hiperboloides, ya sea se trate de una o varias dimensiones. La diferencia de estas distribuciones, por ejemplo, con la distribución normal, es que en la misma representación gráfica esta distribu-

ción muestra parábolas o paraboloides, según sea la dimensión. Las distribuciones hiperbólicas han sido utilizadas en diferentes campos de investigación, tanto teóricos como aplicados, como por ejemplo en sedimentología, en problemas de tamaño de partículas , en modelos no gaussiano con aplicación en turbulencia. A esta clase pertenecen: las distribuciones de Laplace, Gaussiana, Gaussiana Inversa Generalizada, Gamma, recíproca de Gamma, Exponencial, entre otras. El esquema (3.5) ilustra la dependencia que existe entre ellas.



En esta sección presentaremos la distribución Gaussiana Inversa Generalizada tal como la presentó Barndorff-Nielsen. Luego, como se trabajará solamente con el formato amplitud, que es la transformación de la que se habló al comienzo de esta sección, se utilizará la distribución raíz cuadrada de la Gaussiana Inversa Generalizada y como casos particulares de esta, la distribución raíz cuadrada de Gamma y la distribución raíz cuadrada de la recíproca de Gamma.

El nombre de distribución Gaussiana Inversa se debe al matemático inglés M. C. K. Tweedie y data del año 1945. Este matemático, durante la investigación estadística de datos relacionados con mediciones electroforéticas, encontró una distribución que poseía una propiedad notable:

sus funciones generadoras de cumulantes eran inversas a las funciones generadoras cumulantes de la distribución gaussiana, de ahí el nombre de gaussiana inversa.

En el contexto de esta tesis, la distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ será utilizada como modelo general para el backscatter de amplitud. Sus principales propiedades se muestran, a continuación.

Definición 1 *X es una variable aleatoria con distribución Gaussiana Inversa Generalizada de parámetros α , γ y λ , que denotaremos $\mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$, si su función de densidad es:*

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-1} + \lambda x)}, \quad x > 0, \quad (3.6)$$

y el espacio de parámetros viene dado por: si $\alpha < 0$, ($\gamma > 0$ y $\lambda \geq 0$), si $\alpha = 0$, ($\gamma > 0$ y $\lambda > 0$), si $\alpha > 0$, ($\gamma \geq 0$ y $\lambda > 0$) y la constante normalizadora K_α es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden α .

Proposición 2 *La Gaussiana Inversa Generalizada tiene las siguientes propiedades.*

1. Si $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda) \Leftrightarrow X^{-1} \sim \mathcal{N}^{-1}(-\alpha, \gamma, \lambda)$
2. Para todo $c > 0$, $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda) \Rightarrow cX \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, c\gamma, \frac{\lambda}{c})$
- 3.

$$E(X^k) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{k/2} \frac{K_{\alpha+k}(\sqrt{\gamma\lambda})}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})}$$

para $\lambda, \gamma > 0$ y $k \in \mathbb{R}^+$

4. La Transformada de Laplace de la densidad f_X , para $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ viene dada por

$$\hat{f}_X(s) = \left(1 + \frac{2s}{\lambda}\right)^{-\alpha/2} \frac{K_\alpha(\sqrt{\gamma(\lambda + 2s)})}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} \quad (3.7)$$

5. La distribución $\mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ es unimodal y su moda es:

$$x = \begin{cases} \frac{(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 + \gamma\lambda}}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \\ \frac{\gamma}{2(\alpha-1)} & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

La moda es siempre positiva a menos que $\gamma \neq 0$ y $\alpha \leq 1$

Definición 3 Una variable aleatoria X se dice que tiene *distribución Raíz Cuadrada de la Gaussiana Inversa Generalizada* y se la denota $X \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-2} + \lambda x^2)}, \quad x > 0, \quad (3.8)$$

El espacio de los parámetros viene dado por: $(\gamma > 0 \text{ y } \lambda \geq 0)$ si $\alpha < 0$, $(\gamma > 0 \text{ y } \lambda > 0)$ si $\alpha = 0$, $(\gamma \geq 0 \text{ y } \lambda > 0)$ si $\alpha > 0$ y la constante normalizadora K_α es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden α

La figura 3-3 muestra la función de densidad de la distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ con $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ y $\lambda = 1$.

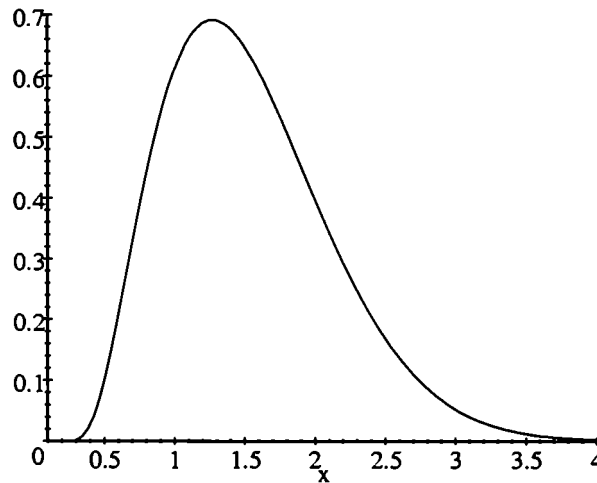


Figura 3-3: Función de densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ con $\alpha = 1, \gamma = 1$ y $\lambda = 1$.

Proposición 4 Sean I una variable aleatoria con distribución gaussiana inversa generalizada

y A una variable aleatoria tal que $A^2 = I$.

Si $I \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ entonces $A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$

Demostración

La función de densidad de la variable aleatoria A viene dada por $f_A(x) = f_I(x^2)2x$ luego, utilizando la ecuación (3.8) se tiene que $f_A(x) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} x^{2(\alpha-1)} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-2} + \lambda x^2)} 2x = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-2} + \lambda x^2)}$, luego $A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$

Proposición 5 *Son válidas las siguientes afirmaciones.*

1. Si $X \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) \Leftrightarrow X^{-1} \sim \mathcal{N}^{-1/2}(-\alpha, \gamma, \lambda)$
2. Para todo $c > 0$, $X \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) \Rightarrow cX \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, c\gamma, \frac{\lambda}{c})$
3. Esta distribución es unimodal y su moda es:

$$\sqrt{\frac{-2\alpha + 1 + \sqrt{(2\alpha - 1)^2 + 4\lambda\gamma}}{2\lambda}}, \lambda > 0, \gamma \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

Veamos, en la siguiente sección dos casos particulares de esta distribución, que serán de suma importancia en lo que resta de esta tesis.

3.2.2 Las distribuciones para el *backscatter* de amplitud

Como ya se mencionó, en el tratamiento de imágenes SAR se ha utilizado la distribución raíz cuadrada de Gamma como modelo para el *backscatter*. En [FMYS97] esto se generalizó a la distribución Gaussiana Inversa Generalizada, pero se vió que en la práctica era suficiente trabajar con la recíproca de la raíz cuadrada de Gamma. Por este motivo, en esta sección serán estudiadas cuidadosamente las principales propiedades de estas distribuciones, haciendo hincapié en sus similitudes y analogías. En el esquema (3.2) se muestran las relaciones, con respecto a la convergencia, entre las distintas distribuciones para el *backscatter*, ver en el Apéndice E.

Definición 6 *Sea X una variable aleatoria. X está distribuída raíz cuadrada de Gamma, que*

denotaremos $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\lambda x^2}, \text{ para } \alpha, \lambda > 0 \quad (3.9)$$

Definición 7 Sea X una variable aleatoria. X está distribuída recíproca de raíz cuadrada de Gamma, que denotaremos $X \sim \Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\gamma x^{-2}}, \text{ para } -\alpha, \gamma > 0 \quad (3.10)$$

Ejemplos de estas densidades para diferentes valores de los parámetros serán mostrados en la sección 3.2.4.

A partir de la distribución $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$, restringiendo el espacio paramétrico obtenemos las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$, como se probará en las siguientes proposiciones.

Proposición 8 Si $X \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ y si se restringe el espacio de los parámetros a $\lambda = 0$ y $-\alpha, \gamma > 0$, entonces $X \sim \Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$.

Demostración

Sabemos que se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_\nu(x) = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) x^{-\nu} \quad (3.11)$$

para $\nu > 0$ y además que

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x) \quad (3.12)$$

con $\nu \in \mathbb{R}$. Ver en Apéndice A definición y propiedades de la función $K_\nu(x)$.

Entonces, utilizando las ecuaciones (3.11) y (3.12) bajo la condición $-\alpha > 0$ y substituyendo en la ecuación (3.8) se tiene:

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2^{-\alpha-1} \Gamma(-\alpha) (\gamma\lambda)^{\alpha/2}} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-2} + \lambda x^2)} =$$

$$= \frac{1}{\gamma^\alpha 2^{-\alpha-1} \Gamma(-\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}\gamma x^{-2}} \quad (3.13)$$

Haciendo un cambio de variables: $y = x\sqrt{2}$ y reemplazando en (3.13) obtenemos:

$$\frac{1}{\gamma^\alpha 2^{-\alpha-1} \Gamma(-\alpha)} y^{2\alpha-1} 2^{(-2\alpha+1)/2} e^{-\gamma y^{-2}} 2^{-1/2} = \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} y^{2\alpha-1} e^{-\gamma y^{-2}}$$

que es, por (3.10) la función de densidad correspondiente a una variable aleatoria distribuída recíproca de la raíz cuadrada de Gamma. Es decir que cuando hacemos tender a 0 el valor del parámetro λ , y $-\alpha$ y γ son positivos, entonces $X \sim \Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$

Proposición 9 Si $X \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ y si se restringe el espacio de los parámetros a $\gamma = 0$ y $\alpha, \lambda > 0$, entonces $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$.

Demostración

Siguiendo un razonamiento análogo a la proposición 8, usando las ecuaciones (3.8), (3.11) y (3.12), se obtiene que X está distribuída raíz cuadrada de Gamma. Es decir que cuando hacemos tender a 0 el valor del parámetro γ , y α y λ son positivos, entonces $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ con función de densidad dada en (3.9)

Proposición 10 Los parámetros λ y γ de las densidades dadas por las ecuaciones (3.9) y (3.10) respectivamente, son parámetros de escala y por lo tanto son ciertas las siguientes afirmaciones:

1. $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda) \Rightarrow X\sqrt{\lambda} \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$, para $\alpha > 0$,
 $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, 1) \Rightarrow X/\sqrt{\lambda} \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$, para $\alpha > 0$
2. $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma) \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{\gamma}} \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, 1)$, para $\alpha < 0$,
 $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, 1) \Rightarrow X\sqrt{\gamma} \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$, para $\alpha < 0$

Demostración

Si $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ entonces $f_X(x) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\lambda x^2}$, consideremos la variable aleatoria $Y =$

$X\sqrt{\lambda}$, luego $f_Y(y) = f_X(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Reemplazando en la ecuación (3.9) obtenemos:

$$f_Y(y) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}} \right)^{2\alpha-1} e^{-\lambda \left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}} \right)^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} y^{2\alpha-1} e^{-y^2}$$

pero esta es la densidad de una variable aleatoria raíz cuadrada de Gamma con parámetros $(\alpha, 1)$, entonces $Y \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$. La otra implicación es inmediata. La prueba de la parte 2) es análoga a la anterior, utilizando la densidad (3.10)

Proposición 11 *Son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. Si $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ entonces $X^{-1} \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \gamma)$
2. Si $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \gamma)$ entonces $X^2 \sim \Gamma(\alpha, \gamma)$

Demostración

Si $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ entonces $f_X(x) = \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\gamma x^{-2}}$ con $-\alpha > 0$, y sea la variable aleatoria $Y = X^{-1}$ cuya función de densidad viene dada por: $f_Y(y) = f_X(\frac{1}{y}) \frac{1}{y^2} = \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} \left(\frac{1}{y} \right)^{2\alpha-1} e^{-\gamma y^2} \frac{1}{y^2} = \frac{2\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} y^{2(-\alpha)-1} e^{-\gamma y^2}$.

La prueba de la parte 2) es análoga a la anterior considerando la variable aleatoria $Y = X^2$ y función de densidad $f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$

3.2.3 Propiedades de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$

Propiedades de la distribución $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$

Propiedad 12 *Los momentos de orden r de la distribución $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ vienen dados por:*

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + r/2)}{\lambda^{r/2} \Gamma(\alpha)} \quad (3.14)$$

y para $\alpha, \lambda > 0$ tiene momentos finitos.

Demostración

Los momentos de orden r se pueden escribir como

$$E(X^r) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{2\alpha-1+r} e^{-\lambda x^2} dx \quad (3.15)$$

haciendo el cambio de variable $\lambda x^2 = y$, $dx = \frac{dy}{2\sqrt{\lambda y}}$ y reemplazando en (3.15) obtenemos

$$\frac{\lambda^{-r/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{(\alpha+r/2)-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha + r/2)}{\lambda^{r/2} \Gamma(\alpha)}$$

Propiedad 13 Varianza de la distribución $\Gamma^{1/2}$, está definida como:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda} \left(\alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\Gamma^2(\alpha)} \right) \quad (3.16)$$

puesto que

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\lambda \Gamma^2(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\lambda \Gamma^2(\alpha)} = \frac{1}{\lambda} \left(\alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\Gamma^2(\alpha)} \right) \end{aligned}$$

La figura 3-4 muestra la varianza en función de los parámetros α y λ . Si $\alpha \rightarrow 0$ entonces $Var(X) \rightarrow 0$ para cualquier valor de λ a menos que $\lambda \rightarrow 0$ en cuyo caso se tendrá que $Var(X) \rightarrow \infty$. La figura 3-5 muestra un corte de la superficie de la varianza para $\lambda = 1$. Se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\Gamma^2(\alpha)} \right) = 0.25$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\Gamma^2(\alpha)} \right) = 0$, es decir que la $Var(X)$ dependerá del parámetro λ y variará inversamente proporcional al parámetro de escala λ , es decir:

$$Var(X) < \frac{1}{4\lambda}$$

esto explicaría el comportamiento en las gráficas de $\Gamma^{1/2}$ cuando se varía el parámetro λ , y el

parámetro α queda fijo como se verá en la sección 3.2.4.

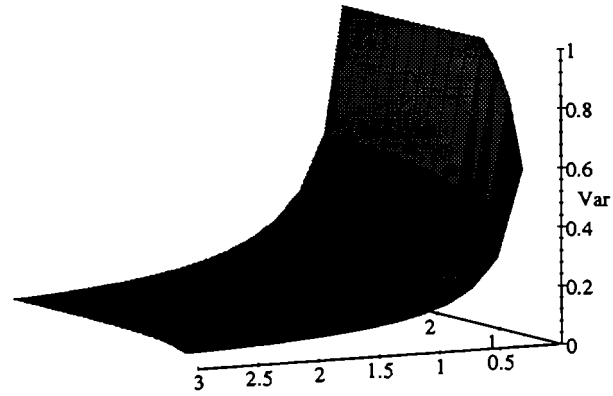


Figura 3-4: Varianza de la distribución $\Gamma^{1/2}$ en función de los parámetros α y λ

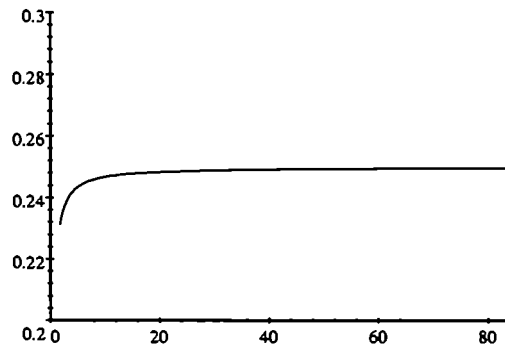


Figura 3-5: Gráfico de $Var(X) = \alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha+1/2)}{\Gamma^2(\alpha)}$, en función de α y para $\lambda = 1$.

Propiedad 14 *El coeficiente de variación ($CV_{\Gamma^{1/2}}$) de la distribución $\Gamma^{1/2}$ es:*

$$CV_{\Gamma^{1/2}} = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha+1/2)}} - 1 \quad (3.17)$$

Recordando que el coeficiente de variación de una distribución es:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{E(X^2)}{E^2(X)} - 1}$$

y utilizando la fórmula (3.14), se obtiene la fórmula (3.17). La figura 3-6 muestra el gráfico del coeficiente de variación en función del parámetro α para $n = 1$.

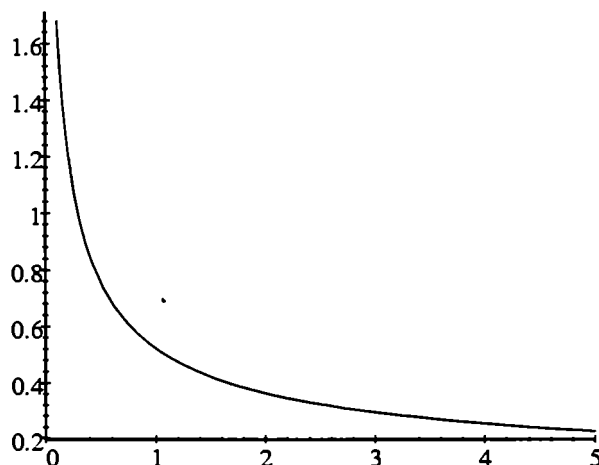


Figura 3-6: Coeficiente de variación $CV_{\Gamma^{1/2}}$ de la distribución $\Gamma^{1/2}$, en función del parámetro α .

Propiedad 15 *Coeficientes de Asimetría y Curtosis de la distribución $\Gamma^{1/2}$.*

Los momentos centrales de orden k de una variable aleatoria X están definidos como $\mu_k = E(X - E(X))^k$ y la varianza de X como $\sigma^2 = E(X - E(X))^2$. Sean γ_1 el coeficiente de asimetría y γ_2 el coeficiente de curtosis, que se definen de la siguiente manera:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \text{ y } \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Si X es una variable aleatoria con distribución $\Gamma^{1/2}$ el coeficiente de asimetría tiene la siguiente fórmula:

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2) ((1 - 4\alpha) \Gamma^2(\alpha) + 4\Gamma^2(\alpha + 1/2))}{2(\alpha\Gamma^2(\alpha) - \Gamma^2(\alpha + 1/2))^{3/2}}$$

y el coeficiente de Curtosis es:

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma^3(\alpha) - 4\Gamma(\alpha + 3/2)\Gamma(\alpha + 1/2)\Gamma^2(\alpha) + 6\Gamma(\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1/2)\Gamma(\alpha) - 3\Gamma^4(\alpha + 1/2)}{(\alpha\Gamma^2(\alpha) - \Gamma^2(\alpha + 1/2))^2} - 3$$

Los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución $\Gamma^{1/2}$ no dependen del parámetro λ , dependen solamente de α , que es un parámetro de forma. Se cumple que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_2 = 0$, es decir, que cuando α es suficientemente grande no hay diferencia entre la distribución $\Gamma^{1/2}$ y la distribución Gaussiana. Las figuras 3-7 y 3-8 muestran la variación del coeficiente de asimetría y del coeficiente de curtosis, ambas en función del parámetro α , respectivamente. En la tabla 3.1 se muestra para ciertos valores de α , como varía γ_1 y de γ_2 .

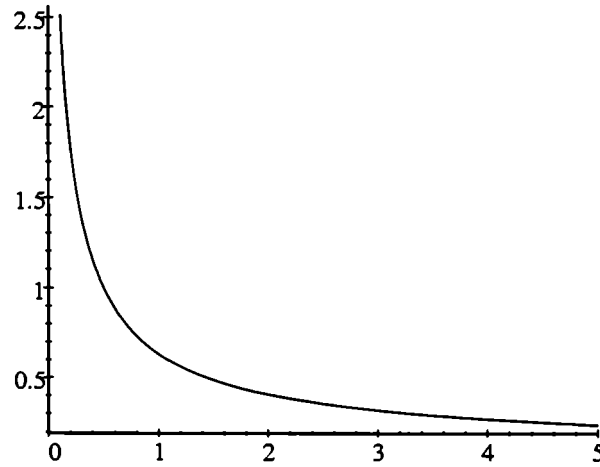


Figura 3-7: Variación del coeficiente de asimetría γ_1 , de la distribución $\Gamma^{1/2}$, en función del parámetros α para número de looks $n = 1$.

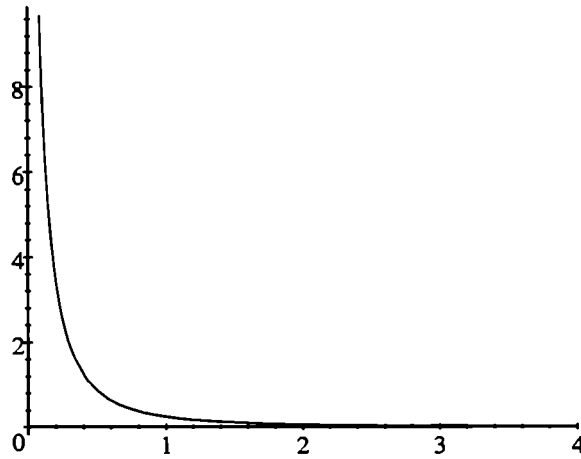


Figura 3-8: Variación del coeficiente de curtosis γ_2 en función del parámetro α

Propiedad 16 *Moda de la distribución $\Gamma^{1/2}$*

La moda de la distribución $\Gamma^{1/2}$ es:

$$moda_{12} = \sqrt{\frac{1-2\alpha}{2\lambda}}, \text{ para } -\alpha, \lambda > 0$$

Derivando la función de densidad e igualando a 0, se tiene:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\lambda x^2} \right) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left((2\alpha-1) x^{2\alpha-2} e^{-\lambda x^2} + x^{2\alpha-1} e^{-\lambda x^2} 2\lambda x \right) =$$

$$= \frac{2\lambda^\alpha x^{2\alpha-2} e^{-\lambda x^2}}{\Gamma(\alpha)} (2\alpha-1 + 2\lambda x^2) = 0$$

despejando x se obtiene moda_{12} . Por lo tanto esta distribución es unimodal y su moda viene dada por:

$$\text{moda}_{12} = \sqrt{\frac{1-2\alpha}{2\lambda}}, \text{ para } \lambda > 0, -\alpha \geq 0$$

Propiedades de la distribución $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$

Propiedad 17 *Momentos de orden r de la distribución $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ son:*

$$E(X^r) = \gamma^{r/2} \frac{\Gamma(-\alpha - r/2)}{\Gamma(-\alpha)}, \text{ para } -\alpha > r/2 \quad (3.18)$$

y para $-\alpha < r/2$, $E(X^r) = \infty$.

La demostración es análoga a la de momentos de orden r de la distribución $\Gamma^{1/2}$, ver ítem 12

Propiedad 18 *Varianza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$*

Su fórmula viene dada por

$$\text{Var}(X) = \gamma \left(\frac{1}{-\alpha - 1} - \frac{\Gamma^2(-\alpha - 1/2)}{\Gamma^2(-\alpha)} \right), \text{ para } -\alpha > 0, -\alpha \neq 1$$

está definida para $\alpha < -1$ y para todo γ y además vale que $\lim_{\alpha \rightarrow -1^-} \text{Var}(X) = \infty$ para cualquier valor de γ .

Se puede ver en la figura 3-9 donde se muestra el gráfico de la varianza en función de los parámetros α y γ . La figura 3-10 muestra un corte de la superficie para $\gamma = 1$. Este hecho nos indica que sería un buen modelo de ajuste para datos muy dispersos cuando el valor del parámetro α toma valores muy cercanos a 0, como es el caso de los datos que provienen de áreas muy heterogéneas en las imágenes SAR.

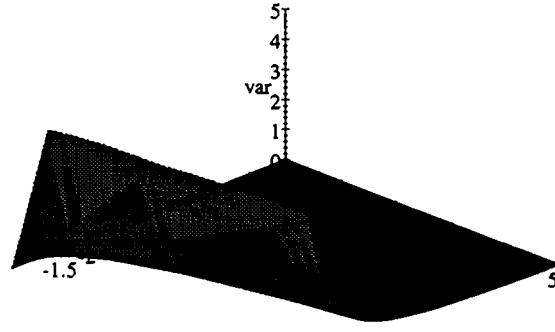


Figura 3-9: Varianza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ en función de los parámetros α y γ

Propiedad 19 El coeficiente de variación ($CV_{\Gamma^{-1/2}}$) de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ es:

$$CV_{\Gamma^{-1/2}} = \sqrt{\frac{\Gamma(-\alpha + 1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2(-\alpha + 1/2)} - 1} \quad (3.19)$$

y utilizando la fórmula (3.18), se obtiene la fórmula (3.19)

Propiedad 20 Coeficientes de Asimetría y Curtosis

Utilizando las definiciones de estos coeficientes vistas en 15 tenemos:

$$\gamma_1 = \frac{(-\alpha - 1) [\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 3/2) - 3\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 1)\Gamma(-\alpha - 1/2) + 2\Gamma^3(-\alpha - 1/2)]}{(\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^{3/2}}$$

definido para $-\alpha > 3/2$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & \frac{\Gamma^3(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 2) - 4\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 3/2)\Gamma(-\alpha - 1/2)}{(\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^2} + \\ & + \frac{6\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2) - 3\Gamma^4(-\alpha - 1/2)}{(\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^2} - 3 \end{aligned}$$

definido para $-\alpha > 2$.

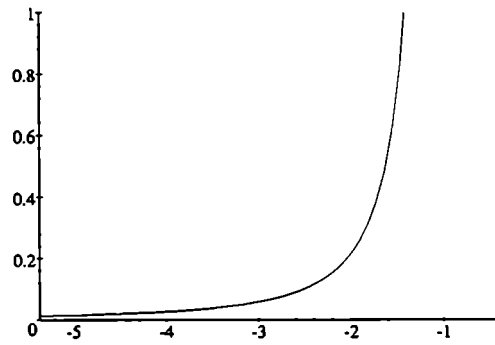


Figura 3-10: Varianza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ en función del parámetro α y $\gamma = 1$.

Ver Apéndice B. Los coeficientes γ_1 y γ_2 , no dependen del parámetro de escala γ , dependen solamente del parámetro α .

Propiedad 21 *Moda de la distribución $\Gamma^{-1/2}$*

La distribución $\Gamma^{-1/2}$ es unimodal y su moda es:

$$moda_{-12} = \sqrt{\frac{2\gamma}{-2\alpha + 1}}, \text{ para } -\alpha, \gamma \geq 0$$

El razonamiento, para este caso, es análogo al que se hizo para la distribución $\Gamma^{1/2}$ en la propiedad 16

En las tablas 3.2, 3.3 y 3.4, se muestran valores de la moda de la distribución $\Gamma^{-1/2}$. Variando α y manteniendo $\gamma = 1$ la tabla 3.2 muestra que cuando α decrece la moda se va acercando al valor 0, gráficamente este hecho se muestra en la figura 3-16. Para valores de γ obtenidos de tal manera que la media sea unitaria, la tabla 3.3 muestra los valores de la moda correspondientes a $\alpha \in \{-0.8, -1, -2, -3, -4, -10\}$, y en la figura 3-20 se puede observar también que cuando α toma valores más cercanos a 0 entonces la moda también se acerca al valor 0. Por último, la tabla 3.4 muestra la moda para $\alpha = -1$ y $\gamma \in \{1, 5, 10, 20, 40\}$ y se ilustra en la figura 3-19. En este caso se puede ver que la moda crece cuando γ crece.

$\Gamma^{1/2}$		
α	γ_1	γ_2
1	0.631	0.245
2	0.405	0.059
3	0.317	0.025
4	0.269	0.013
100	0.051	0.0001

Tabla 3.1: Valores correspondientes a la simetria y curtosis para distintos valores de alpha

$\Gamma^{-1/2}$		
α	γ	moda
-0.5	1	1
-1	1	0.82
-5	1	0.43
-10	1	0.31

Tabla 3.2: Se muestran la variación de la moda para distintos valores de α

$\Gamma^{-1/2}$		
α	γ	moda
-0.8	0.1514	0.3413
-1	0.3183	0.4606
-2	1.2732	0.7136
-3	2.2635	0.8041
-4	3.2595	0.8510
-10	9.2534	0.9387

Tabla 3.3: Se muestran la variacion de la moda para distintos valores de α con los correspondientes valores de γ tal que la media sea unitaria

$\Gamma^{-1/2}$		
α	γ	moda
-1	1	0.816
-1	5	1.825
-1	10	2.582
-1	20	3.651
-1	40	5.164

Tabla 3.4: Se muestran la variacion de la moda para distintos valores de γ

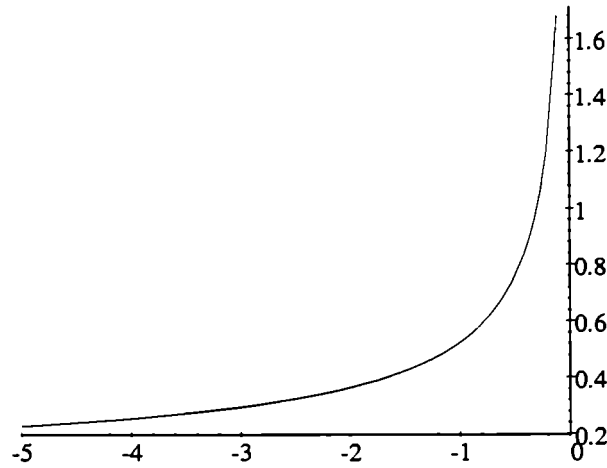


Figura 3-11: Coeficiente de variación $CV_{\Gamma^{-1/2}}$ de la distribución $\Gamma^{-1/2}$, en función del parámetro α .

3.2.4 Interpretación de los parámetros de las distribuciones para el backscatter

Veremos ahora, cuál es el comportamiento de las densidades cuando los parámetros α , λ y γ toman diferentes valores.

En la figura 3-12 se muestran ejemplos de la densidad $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ para el parámetro de escala $\lambda = 1$ y para el parámetro α tomando seis valores diferentes dentro del conjunto $\{0.5, 1, 2, 3, 4, 10\}$.

Para $\alpha = 0.5$ y $\lambda = 1$, como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, la función de densidad queda

$$f_X(x) = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0$$

que es proporcional a la densidad de la distribución normal para $x > 0$ y aparece en dicha figura como la curva de línea sólida gruesa. Vemos que para $\alpha \geq 1$, al aumentar el valor de α , la densidad se vuelve cada vez más simétrica.

Se puede observar en la figura 3-13 que para valores de α cercanos a 0 las densidades se vuelven cada vez menos simétricas, se muestra como referencia a la densidad correspondiente a $\alpha = 0.5$. Calculando la esperanza y varianza de la variable aleatoria X , para $\lambda = 1$ se tiene que

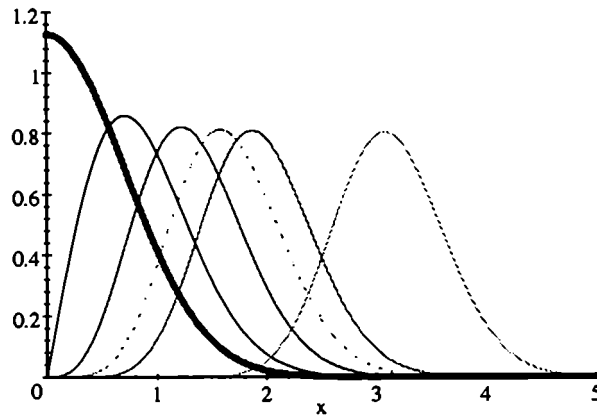


Figura 3-12: Gráfico de las densidades de $\Gamma^{1/2}$ para $\lambda = 1$ y $\alpha \in \{0.5, 1, 2, 3, 4, 10\}$ (sólida gruesa, sólida, cortada, punteada, punto punto línea, respect.)

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha)} \rightarrow 0$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Var(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\alpha - \frac{\Gamma^2(\alpha+1/2)}{\Gamma^2(\alpha)} \right) = 0$. (ver la sección 3.2.3)

Esto sugiere que, para datos con mucha dispersión, como son aquellos provenientes de áreas muy heterogéneas en las imágenes SAR y que se corresponden con valores muy cercanos a 0 para el parámetro α , este no sería un buen modelo a adoptar, a menos que λ tome valores muy cercanos a 0, en cuyo caso la varianza será muy grande aún cuando α sea pequeño.

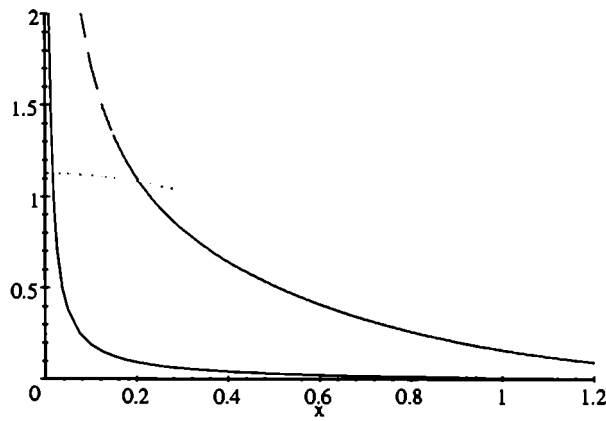


Figura 3-13: Funciones de densidad de la distribución $\Gamma^{1/2}$ para $\lambda = 1$ y $\alpha \in \{0.01, 0.2, 0.5\}$

La figura 3-14 muestra las densidades de $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ para un valor fijo $\alpha = 1$ y tomando λ dentro del conjunto $\{1, 5, 10, 20, 40\}$. La ecuación de la función de densidad para $\alpha = 1$ viene dada por $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ y la moda es alcanzada en $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, es decir, cuando λ crece la moda se va acercando a 0. Notemos que la asimetría de las densidades no varía cuando modificamos el parámetro λ .

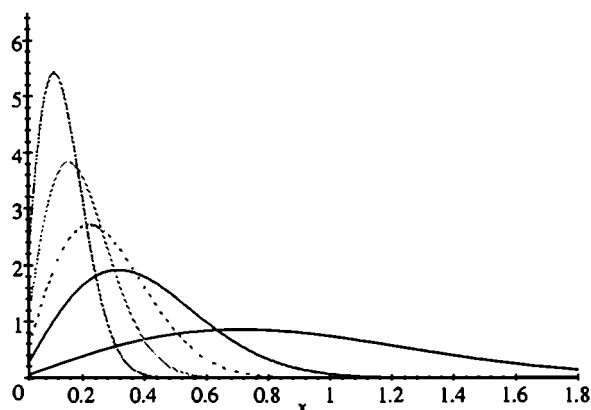


Figura 3-14: Gráfico de densidades de $\Gamma^{1/2}$ para $\alpha = 1$ y $\lambda \in \{1, 5, 10, 20, 40\}$ (sólida, raya, punto, punto raya, punto punto raya, resp.)

Considerando ahora el valor de λ como función de α , tal que la media sea 1, es decir, tal que

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\lambda^{1/2}\Gamma(\alpha)} = 1 \text{ se obtiene } \lambda^* = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2$$

En la tabla 3.5 se muestran los valores de λ^* correspondientes a los valores $\alpha \in \{0.5, 1, 2, 3, 4, 10\}$ y la figura 3-15 muestra la variación de las densidades para dichos valores de α y λ^* . La variación de α indica, como ya vimos en el caso $\lambda = 1$, una variación en la forma o simetría de las densidades. Este caso servirá para poder comparar luego las densidades de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$.

Habiendo visto ya la interpretación de los parámetros α y λ de la distribución $\Gamma^{1/2}$, a continuación veremos la correspondiente a la distribución $\Gamma^{-1/2}$.

En la figura 3-16 se muestra la variación de las densidades de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ para

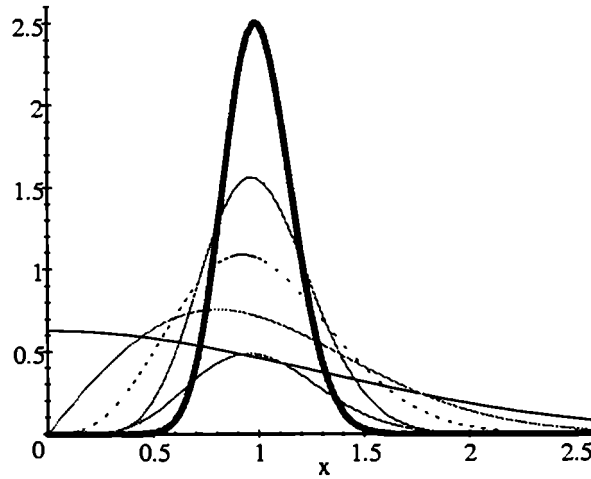


Figura 3-15: Gráfico de la densidades $\Gamma^{1/2}$ correspondientes a los valores $\alpha \in \{0.5, 1, 2, 3, 4, 10\}$ y los valores de λ tal que la media sea unitaria.. (sólida gruesa, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, sólida)

el parámetro de escala $\gamma = 1$ y para valores de $\alpha \in \{-0.5, -1, -2, -3, -4, -10\}$. Se puede apreciar que, cuando los valores de α se acercan a 0, la curva se aplanan cada vez más, es decir que la varianza aumenta cuando aumenta α . Esto significa que estamos en presencia de un buen modelo para ajustar datos muy dispersos, recordando que es el caso de los datos provenientes de áreas extremadamente heterogéneas en las imágenes SAR y que además para este tipo de datos el parámetro α alcanza valores muy cerca de 0.

La esperanza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ para $\gamma = 1$ es $E(X) = \frac{\Gamma(-\alpha-1/2)}{\Gamma(-\alpha)}$ y está definida para $\alpha < -1/2$ y se cumple que $\lim_{\alpha \rightarrow -1/2^-} E(X) = \infty$.

Esta restricción para la media y su análoga para la varianza, que será vista más adelante no comprometen la discusión que se viene siguiendo, ya que la media es una medida de centralidad y la varianza es una medida de dispersión. A pesar de las restricciones, se las utiliza por su simplicidad computacional para este caso. La mediana y la distancia intercuartil siempre existen, pero en este caso no se las utilizó debido a la complejidad analítica que ofrecen.

La varianza de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ para $\gamma = 1$, se puede escribir como

$$Var(X) = V_{\Gamma^{-1/2}}(X) = \left(\frac{1}{-\alpha - 1} - \frac{\Gamma^2(-\alpha - 1/2)}{\Gamma^2(-\alpha)} \right)$$

y está definida para $\alpha < -1$.

Tomando límite, se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1^-} \left(\frac{\Gamma(-\alpha - 1)}{\Gamma(-\alpha)} - \frac{\Gamma^2(-\alpha - 1/2)}{\Gamma^2(-\alpha)} \right) = \infty,$$

como se puede ver en la figura 3-17 que muestra la varianza en función del parámetro α . En la figura 3-18 se muestran las varianzas de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$ en función de $|\alpha|$. Claramente se ve que

$$|V_{\Gamma^{1/2}}(X)| < 1/2, \text{ para todo } \alpha,$$

(donde $V_{\Gamma^{1/2}}$ denota la varianza de $\Gamma^{1/2}$), a diferencia de la varianza $V_{\Gamma^{-1/2}}(X)$ que crece cuando $|\alpha|$ se acerca a 1 por la derecha. Lo que se destaca de esta comparación es que los datos de imágenes SAR no siempre pueden ser bien ajustados utilizando el modelo de la distribución $\Gamma^{1/2}$ para el backscatter, pero sí cuando se utiliza la distribución $\Gamma^{-1/2}$ como modelo.

La figura 3-19 muestra las densidades de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ para el parámetro $\alpha = -1$ y $\gamma \in \{1, 5, 10, 20\}$, la variación creciente del parámetro de escala γ implica densidades con medias crecientes, su forma no varía presentando todas una asimetría equivalente. Consideremos, por último al parámetro γ como función de α de tal manera que la media sea 1, es decir, tal que

$$E(X) = \gamma^{1/2} \frac{\Gamma(-\alpha - 1/2)}{\Gamma(-\alpha)} = 1, \text{ para } \alpha < -1/2$$

Para valores de $\alpha \geq -1/2$, $E(X) = \infty$. Entonces γ como función de α viene dada por

$$\gamma^* = \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(-\alpha - 1/2)} \right)^2$$

En la tabla 3.6 se muestran los valores de γ^* para los valores $\alpha \in \{-0.8, -1, -2, -3, -4, -10\}$ y en la figura 3-20 se muestra la variación de las densidades $\Gamma^{-1/2}$ para estos mismos valores.

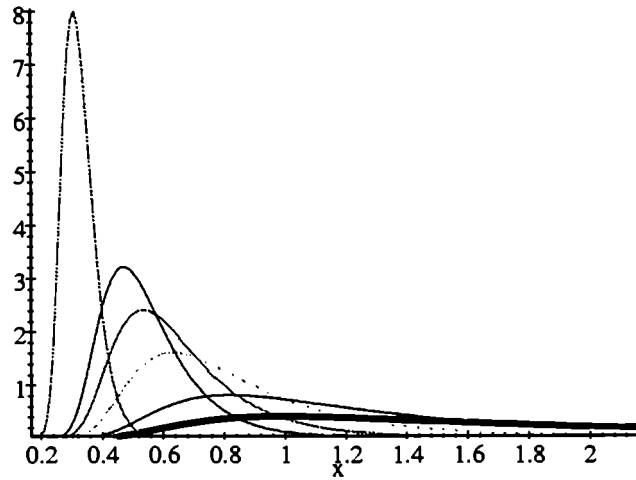


Figura 3-16: Gráficos de las densidades $\Gamma^{-1/2}$ para $\gamma = 1$ y $\alpha \in \{-0.5, -1, -2, -3, -4, -10\}$ (sólida gruesa, sólida, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, resp.)

Notemos que las colas de las densidades cuando α aumenta tienden a ser más débiles, como se puede ver en la figura 3-21, donde para las densidades más simétricas son las correspondientes a $\alpha = -4$ y a $\alpha = -10$ que son las que en esta representación se ven como parábolas, mientras que para $\alpha = -1$ y $\alpha = -0.8$ las curvas muestran una forma hiperbólica, ver [BNB81].

Notemos que las colas de las densidades cuando α decrece se hacen más débiles. Para $\alpha = -0.8$ la densidad es la menos simétrica.

3.2.5 Comparación de las densidades $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$

Para finalizar esta sección consideraremos las variaciones de los parámetros de las densidades de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$ y sus gráficos en forma comparativa. Además utilizando las fórmulas de los momentos de $\Gamma^{1/2}$ y de $\Gamma^{-1/2}$ vemos que el parámetro de escala λ de la distribución $\Gamma^{1/2}$:

$$\lambda = \left(\frac{\Gamma(\alpha + r/2)}{\Gamma(\alpha) E(X^r)} \right)^{2/r}$$

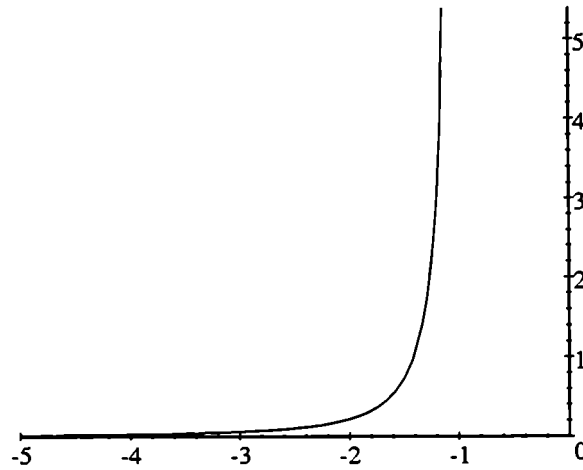


Figura 3-17: Gráfico de la varianza de $\Gamma^{-1/2}(-\alpha, 1)$ en función de α

y el parámetro de escala γ de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ es:

$$\gamma = \left(\frac{\Gamma(-\alpha) E(X^r)}{\Gamma(-\alpha - r/2)} \right)^{2/r}$$

notando que λ y γ tienen un comportan como valores inversos.

La figura 3-22 muestra las diferencias entre las densidades correspondientes a las distribuciones $\Gamma^{1/2}(0.5, 0.31)$ y $\Gamma^{-1/2}(-0.8, 0.15)$, cuando los parámetros α_1 de la distribución $\Gamma^{1/2}$ y α_2 de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ están muy cerca de 0. Aquí vemos que la distribución $\Gamma^{-1/2}$ sería un buen modelo para datos muy dispersos y que la distribución $\Gamma^{1/2}$ no cumpliría este requisito.

Pero si consideramos los pares de distribuciones $\Gamma^{1/2}(4, 3.7)$ y $\Gamma^{-1/2}(-4, 3.2)$, la diferencia entre ellas como se puede apreciar en la figura 3-23 es muy pequeña, un valor numérico aproximado de la distancia L_2 entre las dos distribuciones es 0.08. En la misma figura se tienen los gráficos de las densidades $\Gamma^{1/2}(10, 9.7)$ y $\Gamma^{-1/2}(-10, 9.2)$ y se puede notar que la diferencia entre ambas disminuyó. Calculando la distancia L_2 aproximada entre ellas dió como resultado 0.05. (En el Capítulo 6 se tratará el tema de la aproximación numérica de las distribuciones con más profundidad). Por consiguiente, esto nos sugiere que para datos heterogéneos pero no extremadamente heterogéneos, como así también para homogéneos la distribución $\Gamma^{-1/2}$ puede

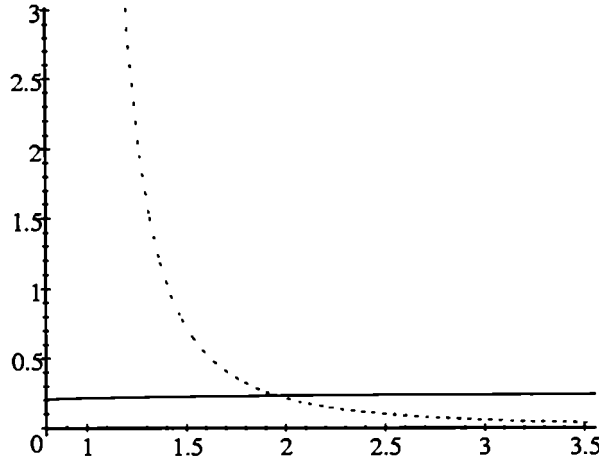


Figura 3-18: Las curvas corresponden a las varianzas de $\Gamma^{1/2}$ (sólida) y $\Gamma^{-1/2}$ (punteada) en función de $|\alpha|$, para $\lambda = \gamma = 1$.

substituir a la distribución $\Gamma^{1/2}$.

3.3 Las distribuciones para el retorno de amplitud

En esta sección veremos las distribuciones que se han propuesto para el retorno de amplitud. En los esquemas (3.3) y 3.4 se presentaron, a partir del modelo multiplicativo, las relaciones entre las diferentes distribuciones que modelan el retorno, para el *speckle* con modelo $\Gamma^{1/2}(n, n)$ y para los diferentes modelos de backscatter según sea que los datos provengan de áreas con mayor o menor grado de homogeneidad. Veremos entonces las distribuciones \mathcal{G} , \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 .

3.3.1 La distribución \mathcal{G}

Cuando el modelo general del *backscatter* en formato amplitud sigue la distribución raíz cuadrada de la Gaussiana inversa generalizada $\mathcal{N}^{-1/2}$ y el *speckle* sigue la ley $\Gamma^{1/2}$, entonces bajo el modelo multiplicativo el retorno será modelado con la distribución \mathcal{G} que dependerá de cuatro parámetros como se sintetizó en la tabla 3.3. La densidad de una variable distribuída

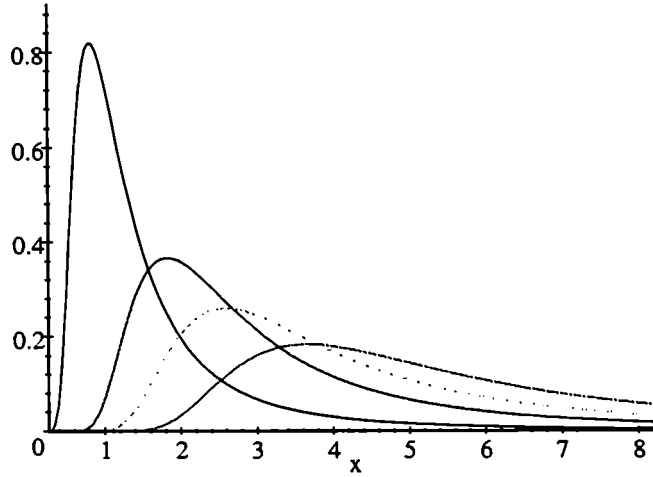


Figura 3-19: Gráfico de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha = -1$ y $\gamma \in \{1, 5, 10, 20\}$

$\mathcal{G}(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ es:

$$f_{Z_A}(z) = \frac{2n^n \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2}}{\Gamma(n) K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} \left(\frac{\gamma + nz^2}{\lambda}\right)^{(\alpha-n)/2} K_{\alpha-n}\left(2\sqrt{\lambda(\gamma + nz^2)}\right), z \in \mathbb{R}$$

y sus momentos de orden r :

$$E(Z^r) = \left(\frac{\gamma}{n^2\lambda}\right)^{r/4} \frac{K_{\alpha-r/2}(2\sqrt{\gamma\lambda}) \Gamma(n+r/2)}{K_\alpha(2\sqrt{\gamma\lambda}) \Gamma(n)}$$

En la figura 3-24 se muestran dos gráficas de la densidades de la distribución \mathcal{G} para $\alpha = 1, n = 1, \lambda = 1$ y $\gamma = 1$, donde $f_{Z_A}(z) = \frac{2}{K_1(2)} K_0\left(2\sqrt{(1+z^2)}\right)$ y para $\alpha = 2, n = 1, \lambda = 1$ y $\gamma = 1$, donde $f_{Z_A}(z) = \frac{2}{K_2(2)} (\gamma + nz^2)^{1/2} K_1\left(2\sqrt{(1+z^2)}\right)$, respectivamente. Su representación logarítmica se muestra en la figura 3-25.

3.3.2 La distribución \mathcal{K}_A

Es bien sabido la importancia de las distribuciones \mathcal{K} y la existencia de numerosa literatura que aborda este tema, por ejemplo, ver [JT87], [Oli91] y [OQ98], entre otros. Dentro de estas distribuciones encontramos el caso particular de la distribución \mathcal{K}_A para datos de amplitud, a

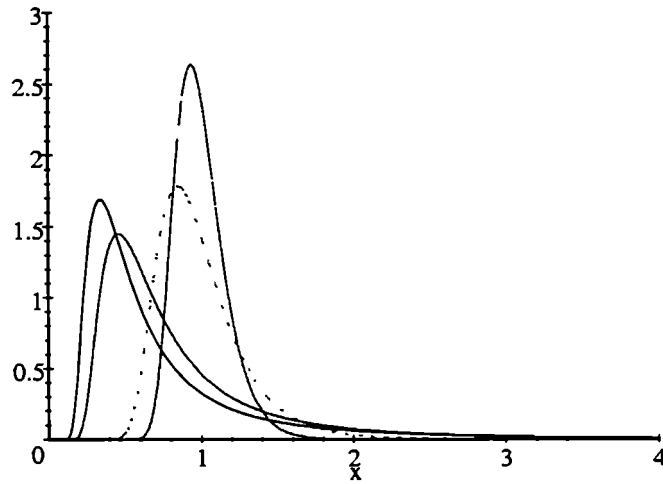


Figura 3-20: Gráficos de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha \in \{-0.8, -1, -4, -10\}$ y valores de γ tal que la media sea 1, que aparecen en la tabla 1.2 . (sólida, cortada, punteada, punto línea, resp.)

la que nos dedicaremos en esta tesis. Daremos a continuación las definiciones y propiedades de la distribución \mathcal{K}_A , como así también mostraremos gráficamente la variación de las funciones de densidad con respecto a sus parámetros.

Definición 22 La función de densidad para la distribución \mathcal{K}_A está definida de la siguiente forma:

$$f_K(x) = \frac{4(\sqrt{\lambda n})^{\alpha+n}}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+n-1} K_{\alpha-n}(2x\sqrt{\lambda n}), \quad x, \alpha, \lambda, n > 0 \quad (3.20)$$

y su función de distribución acumulada es para la K_A :

$$F_X(x; \alpha) = 1 + \frac{2^{2-\alpha-n}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} g(\nu, k, z)$$

$$\text{donde } g(\nu, k, z) = \begin{cases} -z^{\nu+1} K_{\nu+1}(z) & \text{si } k = 1 \\ (k-1)(2\nu+k-1)g(\nu, k-2, z) - \\ -z^{\nu+k} K_{\nu+1}(z) - (k-1)z^{\nu+k-1} k_\nu(z) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

donde K_ν es la función modificada de Bessel de tercera especie y orden ν .

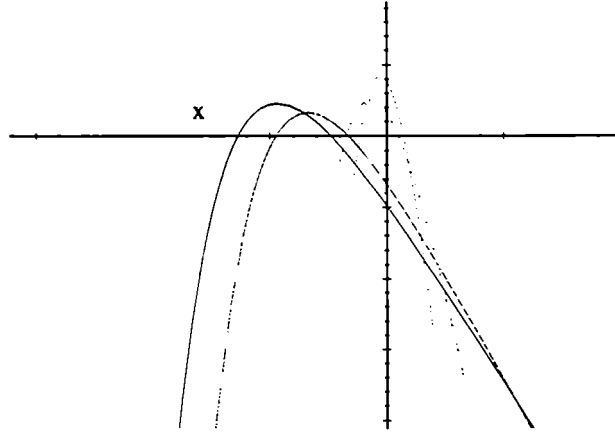


Figura 3-21: Representación logarítmica de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha \in \{-0.8, -1, -4, -10\}$ y valores de γ tal que la media sea 1, que aparecen en la tabla 1.2 , (sólida, cortada, punteada, punto raya, resp.)

Proposición 23 Sean X_A e Y_A dos variables aleatorias independientes tales que $X_A \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ y $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ con $\alpha, \lambda, n > 0$, entonces la variable aleatoria producto $Z_A = X_A Y_A$ tiene distribución $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ con $\alpha, \lambda, n > 0$.

Demostración

Para la demostración ver Apéndice F proposición 56.

3.3.3 Propiedades de la distribución \mathcal{K}_A

Propiedad 24 Los momentos de orden r de una variable aleatoria Z con distribución \mathcal{K}_A son:

$$E(Z_A^r) = (\lambda n)^{-r/2} \frac{\Gamma(n + r/2) \Gamma(\alpha + r/2)}{\Gamma(n) \Gamma(\alpha)} \quad (3.21)$$

Propiedad 25 La varianza de una variable aleatoria Z con distribución \mathcal{K}_A es:

$$Var_{\mathcal{K}_A}(Z) = \frac{1}{\lambda n} \left(n\alpha - \frac{\Gamma^2(n + 1/2) \Gamma^2(\alpha + 1/2)}{\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha)} \right) \quad (3.22)$$

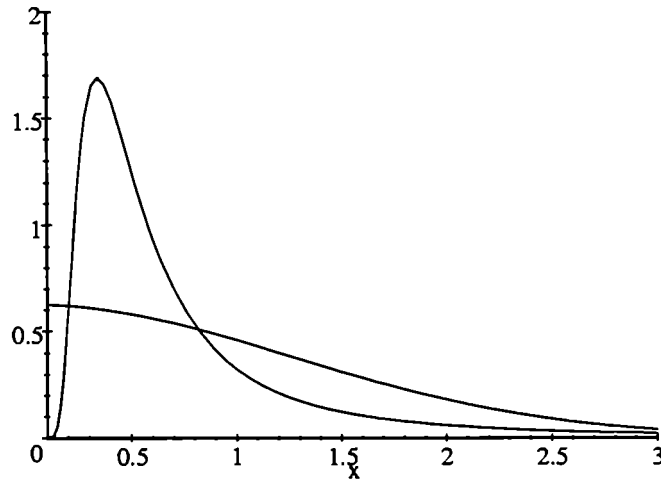


Figura 3-22: Gráfico de las densidades $\Gamma^{1/2}(0.5, 0.31)$ y $\Gamma^{-1/2}(-0.8, 0.32)$ (sólida y punteada, resp.)

Podemos notar, según la ecuación (3.22), que en el caso que el parámetro α toma valores muy cercanos a 0, es decir, cuando se está en presencia de áreas con datos muy heterogéneos, se tiene que para valores fijos de λ y n , la varianza se hace muy pequeña. Esto es un índice que el modelo considerado no es bueno para este tipo de áreas, puesto que la variabilidad de los datos, en este caso, sería muy grande. Por otro lado, teniendo en cuenta que la varianza también depende del parámetro λ , cuando éste es muy pequeño la varianza es muy grande, por lo tanto, para datos provenientes de áreas muy heterogéneas, que es el caso cuando α es muy pequeño, no podríamos afirmar que este modelo no ajusta bien. Para tener una noción más clara del problema hay que considerar el coeficiente de variación. Este hecho se muestra en la figura 3-26, donde se ve el gráfico de la varianza en función de los parámetros α y γ , para $n = 1$.

Propiedad 26 *El coeficiente de variación de la distribución \mathcal{K}_A es:*

$$CV_{\mathcal{K}_A} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(\alpha+1/2)}} - 1$$

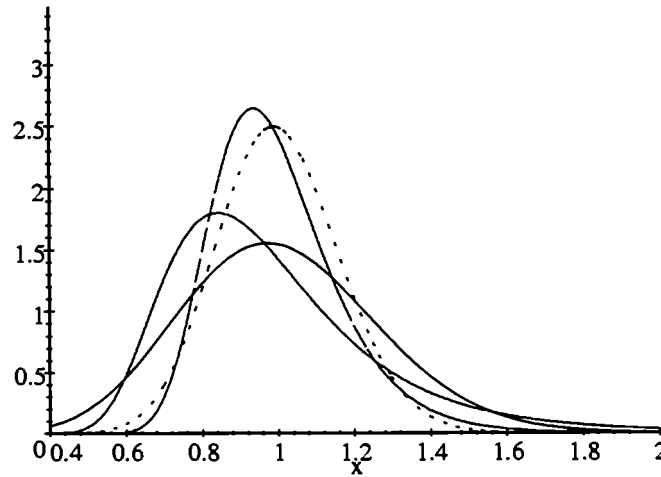


Figura 3-23: Densidades $\Gamma^{1/2}(4, 3.7)$ (sólida), $\Gamma^{-1/2}(-4, 3.2)$ (cortada), $\Gamma^{1/2}(10, 9.7)$ (punteada) y $\Gamma^{-1/2}(-10, 9.2)$ (punto raya)

La fórmula del coeficiente de variación CV para una variable aleatoria X es:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)}}{E(X)} = \sqrt{\frac{E(X^2)}{E^2(X)} - 1} \quad (3.23)$$

Luego, reemplazando por el momento de orden 2 y por el cuadrado del momento de orden 1, el coeficiente de variación para una variable aleatoria X con distribución \mathcal{K}_A es:

$$CV_{\mathcal{K}_A} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(\alpha+1/2)} - 1} \quad (3.24)$$

que no depende del parámetro λ .

La figura 3-27 muestra las densidades de la distribución \mathcal{K}_A para $\alpha = 1$, $\alpha = 4$ y $\alpha = 8$, cuando $\lambda = 1$ y $n = 1$. Gráficamente se podría decir que cuanto menor es α la curva considerada tiene menos dispersión, pero este hecho no es cierto, ya que si calculamos para cada curva el coeficiente de variación éste nos dará el porcentaje de varianza relativa al valor medio.

Para $n = 1$ tenemos los siguientes valores: $CV_1 = 0.79$, $CV_4 = 0.59$ y $CV_8 = 0.56$. A menor CV le corresponde un área más homogénea, es decir que para el parámetro $\alpha = 4$ correspondería una curva que ajusta datos más homogéneos que para $\alpha = 1$ pero menos homogéneos que

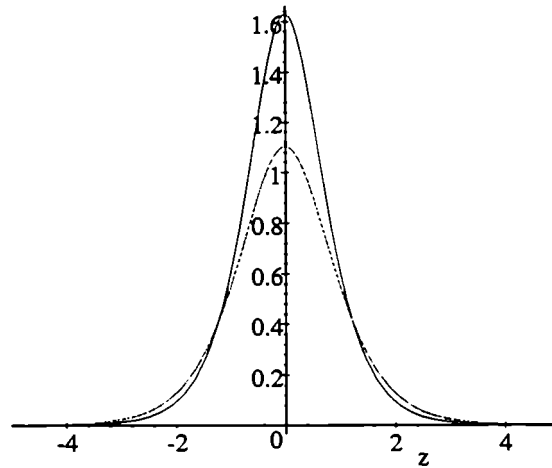


Figura 3-24: Funciones de densidad correspondientes a $\mathcal{G}(1, 1, 1, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}(2, 1, 1, 1)$ (punteada), respectivamente

para $\alpha = 8$. En la figura 3-28 se muestran las mismas densidades que en la figura 3-27 pero utilizando los valores λ^* que corresponden a los valores del parámetro λ cuando la media es unitaria, que es considerada para poder luego hacer una comparación con la distribución \mathcal{G}_A^0 . En la figura 3-29 se muestran las densidades variando el parámetro λ y dejando fijos los parámetros $\alpha = 1$ y $n = 1$, en ese caso la densidad es: $f_K(x) = 4(\sqrt{\lambda})^2 x K_0(2x\sqrt{\lambda})$, se puede ver que cuando λ decrece la dispersión aumenta. La figura 3-30 muestra las densidades cuando se mantienen fijos los parámetros $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ y variando n en este caso se consideró $n = 1$ y $n = 10$.

Propiedad 27 *Coefficientes de Asimetría y Curtosis para la distribución \mathcal{K}_A*

Si X es una variable aleatoria con distribución \mathcal{K}_A los coeficientes de asimetría y curtosis son:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \text{ y } \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Para el desarrollo de las fórmulas, ver Apéndice B. Estos dos coeficientes no dependen del

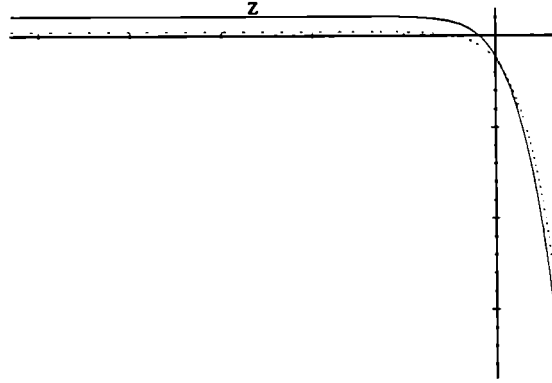


Figura 3-25: Funciones de densidad correspondientes a $\mathcal{G}(1, 1, 1, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}(2, 1, 1, 1)$ (punteada), en su representación logarítmica.

parámetro de escala γ .

3.3.4 La distribución \mathcal{G}_A^0

Vamos a dedicar esta sección a la distribución central para esta tesis: la distribución \mathcal{G}_A^0 . Esta distribución se debe a Frery et al, ver [FMYS97], y es de suma importancia en el procesamiento y el análisis de imágenes SAR. Esta importancia se debe a que esta distribución es un buen modelo para ajustar datos extremadamente heterogéneos, a costos computacional y teórico relativamente bajos. Hasta ese momento no había ningún buen modelo que ajustara bien este tipo de datos dentro de la clase de distribuciones que devienen del modelo multiplicativo.

La distribución \mathcal{K}_A era, en la propuesta de ese artículo, un modelo válido solamente para datos homogéneos y heterogéneos, pero fallaba para modelar datos extremadamente heterogéneos. Además la poca tratabilidad de su función de densidad y su función de distribución acumulada, impedían utilizarla como un modelo general para datos SAR dentro del modelo multiplicativo.

En el artículo antes mencionado se mostró que la distribución \mathcal{G}_A^0 ajusta bien los datos de cualquier tipo de áreas y, además, posee una función de densidad y una función de distribución totalmente tratables numérica y computacionalmente. Presentaremos en esta sección su fun-

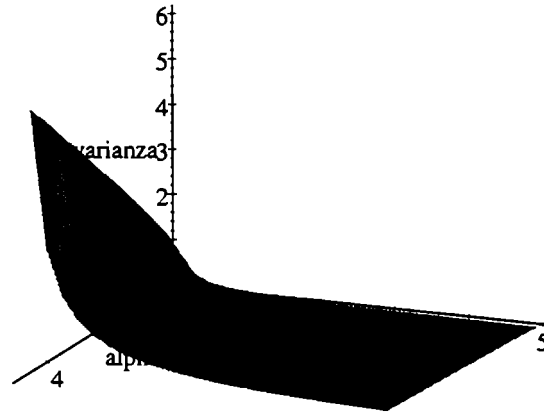


Figura 3-26: Varianza de la distribución \mathcal{K}_A en función de α y λ , para $n = 1$

ción de densidad, los gráficos correspondientes a la variación de sus parámetros junto con sus propiedades más importantes, momentos, coeficientes de asimetría y curtosis y propiedades de convergencia. Se verá también que la función de distribución acumulada es fácilmente obtenible a través de la distribución \mathcal{F} de Snedecor. Este hecho, a la luz de la amplia divulgación de esta última en varios sistemas computacionales, será muy útil a la hora de estimar los parámetros de esta distribución.

Definición 28 La variable aleatoria Z_A se dice que está distribuida \mathcal{G}_A^0 y denotamos $Z_A \sim \mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ si su función de densidad es

$$f_{Z_A}(z) = \frac{2n^n \Gamma(n - \alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} \frac{z^{2n-1}}{(\gamma + z^{2n})^{n-\alpha}}, \text{ para } -\alpha, \gamma, n, z > 0 \quad (3.25)$$

y su función de distribución acumulada es

$$F_{Z_A}(z) = \frac{n^{n-1}}{\gamma^n} \frac{\Gamma(n - \alpha)}{\Gamma(n) \Gamma(\alpha)} \frac{z^{2n}}{H(n, n - \alpha; n + 1; \frac{-nz^2}{\gamma})}, \quad (3.26)$$

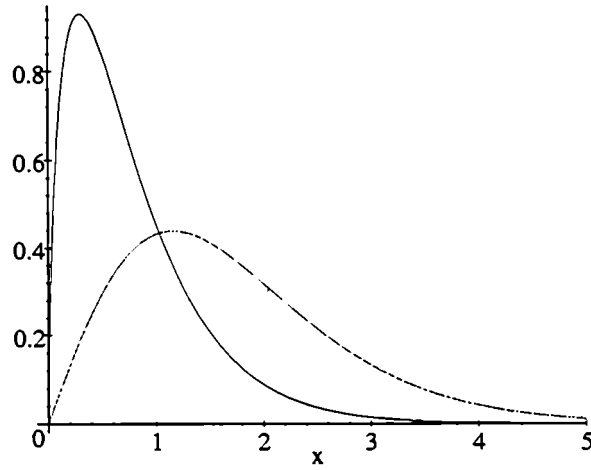


Figura 3-27: Densidades de la distribución \mathcal{K}_A para $n = 1$, $\lambda = 1$ y $\alpha = 1$ (sólida), $\alpha = 4$ (rayada) y $\alpha = 8$ (punteada), resp.

donde H es la función hipergeométrica definida de la siguiente forma:

$$H(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}$$

Proposición 29 Sean X_A e Y_A dos variables aleatorias independientes tales que $X_A \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ y $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ con $-\alpha, \gamma, n > 0$, entonces la variable aleatoria producto $Z_A = X_A Y_A$ tiene distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ con $-\alpha, \gamma, n > 0$.

Demostración:

Si $Z_A = X_A Y_A$ y X_A e Y_A son independientes entonces la función de densidad f_{Z_A} de Z_A es $f_{Z_A}(z) = \int_0^{\infty} f_{X_A}\left(\frac{z}{y}\right) f_{Y_A}(y) \frac{1}{y} dy$ (ver Apéndice H, proposición 64). Entonces,

$$f_{Z_A}(z) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} \left(\frac{z}{y}\right)^{2\alpha-1} e^{-\gamma\left(\frac{z}{y}\right)^{-2}} \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2} \frac{1}{y} dy =$$

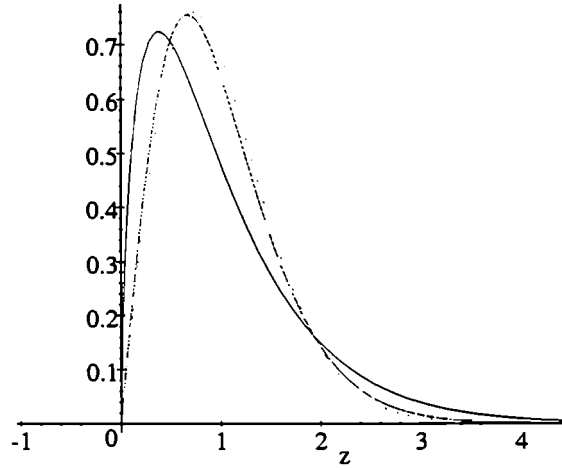


Figura 3-28: Densidades correspondientes a $\mathcal{K}_A(1, 0.6, 1)$ (sólida) y $\mathcal{K}_A(4, 2.95, 1)$ (cortada) y $\mathcal{K}_A(8, 6.09, 1)$ (punteada). Los valores de λ son los obtenidos suponiendo media unitaria.

$$\frac{2z^{2\alpha-1}}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} \frac{n^n}{\Gamma(n)} 2 \int_0^\infty y^{2(n-\alpha)-1} e^{-y^2(\frac{\gamma}{z^2}+n)} dy =$$

haciendo el cambio de variables $y = zt(\gamma + z^2n)^{-1/2}$ se tiene

$$\frac{2n^n}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} \frac{z^{2n-1}}{(\gamma + z^2n)^{(n-\alpha)}} 2 \int_0^\infty t^{2(n-\alpha)-1} e^{-t^2} dt.$$

Como $2 \int_0^\infty t^{2(n-\alpha)-1} e^{-t^2} dt = \Gamma(n-\alpha)$, entonces la función de densidad de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ es

$$f_{\mathcal{Z}_A}(z) = \frac{2n^n \Gamma(n-\alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} \frac{z^{2n-1}}{(\gamma + z^2n)^{(n-\alpha)}}.$$

Definición 30 Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{F}_{m,n}$ de Snedecor con m y n

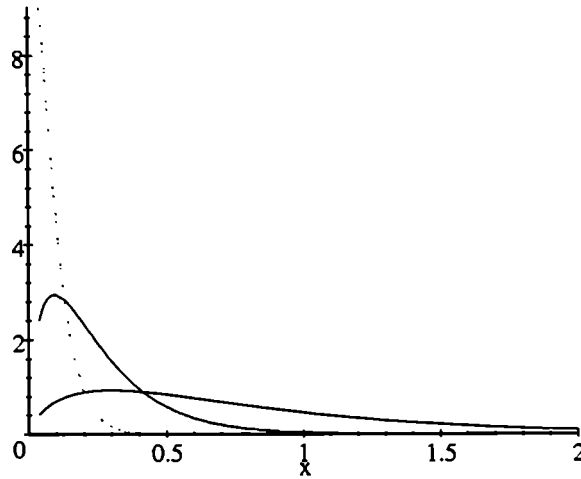


Figura 3-29: Densidades de la distribución \mathcal{K}_A , para $\alpha = 1$, $n = 1$ y $\lambda = 1$ (sólida), $\lambda = 10$ (cortada) y $\lambda = 100$ (punteada)

grados de libertad, entonces su función de densidad viene dada por:

$$f_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m-2}{2}} \left(1 + \frac{m}{n}t\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

y su función de distribución acumulada es:

$$\Upsilon_{m,n}(t) = \Pr(X \leq x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \int_0^x t^{\frac{m-2}{2}} \left(1 + \frac{m}{n}t\right)^{-\frac{m+n}{2}} dt$$

Teorema 31 La distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ es proporcional a la raíz cuadrada de la distribución de Snedecor $\mathcal{F}_{2n, -2\alpha}$, y su función de distribución acumulada viene dada por:

$$F_{Z_A}(z) = \Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\alpha z^2/\gamma) \quad (3.27)$$

Demostración

Sean X , Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ e $Y \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ y Z una variable aleatoria tal que $Z = XY$. Consideremos la variable aleatoria $X^* = 1/X$. De la proposición 11 parte 1) se tiene que si $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ entonces $X^* \sim \Gamma^{1/2}(-\alpha, \gamma)$ y por la

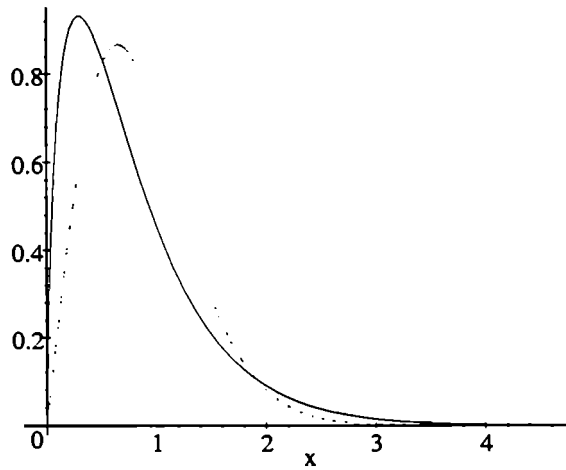


Figura 3-30: Gráfico correspondiente a las funciones de densidad de la distribución $\mathcal{K}_A(1, 1, 1)$ (sólida), $\mathcal{K}_A(1, 1, 2)$ (cortada), $\mathcal{K}_A(1, 1, 10)$ (punteada), resp.

parte 2) de la misma, vale que $X^{*2} \sim \Gamma(-\alpha, \gamma)$ y que $Y^2 \sim \Gamma(n, n)$. Consideremos la variable aleatoria

$$Z^2 = \frac{Y^2}{X^{*2}}.$$

y veamos que ley sigue. Se sabe que, si W es una variable aleatoria que tiene distribución $\Gamma(\eta, \frac{1}{2})$, cuya función de densidad es:

$$f_W(w) = \frac{w^{\eta-1} \exp(-w/2)}{2^\eta \Gamma(\eta)}, \text{ para } \eta, w > 0.$$

coincide con la función de densidad de χ_ν^2 para $2\eta = \nu$:

$$f_{\chi_\nu^2}(t) = \frac{t^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-t/2)}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}, \text{ para } t, \nu > 0.$$

Luego, de la proposición 10, parte 1) se tiene que $2nY^2 \sim \Gamma(n, \frac{1}{2})$ y que $2\gamma X^{*2} \sim \Gamma(-2\alpha, \frac{1}{2})$,

es decir, podemos asegurar que:

$$2nY^2 \sim \chi_{2n}^2 \text{ y } 2\gamma X^{*2} \sim \chi_{-2\alpha}^2$$

Se sabe que si U y V son variables aleatorias tales que $U \sim \chi_\nu^2$ y $V \sim \chi_\mu^2$ entonces

$$\frac{U/\nu}{V/\mu} \sim \mathcal{F}_{\nu,\mu},$$

donde $\mathcal{F}_{\nu,\mu}$ es la distribución de Snedecor con ν y μ grados de libertad. Consideremos ahora $X = X_A$, $Y = Y_A$ y $Z = Z_A$, entonces se tiene que:

$$\frac{-\alpha}{\gamma} Z_A^2 = \frac{2nY_A^2(2n)}{2\gamma X_A^2(-2\alpha)} \sim \mathcal{F}_{2n,-2\alpha},$$

Entonces si S es una variable aleatoria tal que $S \sim \mathcal{F}_{2n,-2\alpha}$ tenemos que $Z_A = \left(\frac{\gamma}{-\alpha}\right)^{1/2} S^{1/2}$ cuya función de distribución acumulada se puede calcular como:

$$F_{Z_A}(z) = \Pr(Z_A \leq z) = \Pr\left(\left(\frac{\gamma}{-\alpha}\right)^{1/2} S^{1/2} \leq z\right) = \Pr\left(S \leq \frac{-\alpha}{\gamma} z^2\right),$$

y como $S \sim \mathcal{F}_{2n,-2\alpha}$ obtenemos:

$$F_{Z_A}(z) = \Upsilon_{2n,-2\alpha}(-\alpha z^2/\gamma),$$

donde $\Upsilon_{\tau,\nu}$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución \mathcal{F} de Snedecor.

Como la distribución \mathcal{F} se encuentra en una gran cantidad de importantes problemas estadísticos, su función acumulada Υ se puede obtener en diversos sistemas y tablas estadísticos. Por lo tanto se tiene una forma fácil de obtener la función acumulada para la distribución \mathcal{G}_A^0 utilizando tablas estadísticas estandar o rutinas para la distribución \mathcal{F} .

Esta importante relación entre las distribuciones \mathcal{G}_A^0 y \mathcal{F} permite el cómputo de cantidades relevantes tales como los estadísticos de orden, que son utilizados en estimación de parámetros, en proyecto de filtros robustos etc. Otra utilidad práctica de esta relación es la posibilidad de

evaluar la función hipergeométrica de manera fácil, tal como se muestra a continuación.

Corolario 32 *La función hipergeométrica puede ser calculada en función de la distribución acumulada \mathcal{F} de Snedecor.*

Demostración

Si Z_A es una variable aleatoria tal que $Z_A \sim \mathcal{G}^0(\alpha, \gamma, n)$, entonces su distribución acumulada es:

$$F_{Z_A}(z) = \frac{n^{n-1}\Gamma(n-\alpha)z^{2n}}{\gamma^n\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)}H(n, n-\alpha; n+1; -nz^2/\gamma),$$

donde $H(n, n-\alpha; n+1; -nz^2/\gamma)$ es la función hipergeométrica, (ver [FMYS97]), entonces, utilizando la ecuación (3.27) y despejando tenemos que la función hipergeométrica H se puede escribir

$$H(n, n-\alpha; n+1; -nz^2/\gamma) = \frac{\gamma^n\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)}{n^{n-1}\Gamma(n-\alpha)z^{2n}}\Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\alpha z^2/\gamma)$$

y que es muy fácil de calcular numéricamente debido a que la función de distribución acumulada \mathcal{F} de Snedecor está tabulada.

3.3.5 Propiedades de la distribución \mathcal{G}_A^0

Propiedad 33 *Variación de los parámetros*

A lo largo de este capítulo hemos visto, en todas las distribuciones estudiadas, la importancia que juegan los parámetros para los cuales están definidas las correspondientes funciones de densidad. En particular, para el caso de la distribución \mathcal{G}_A^0 , centraremos nuestra atención en la variación de los tres parámetros α , γ y n . El comportamiento de estos parámetros, en el caso concreto de aplicación a imágenes SAR, nos dará información que podrá ser utilizada, por ejemplo, para filtrado del ruido speckle o para segmentación y clasificación de las mismas. El parámetro α es un parámetro de rugosidad ya que la varianza relativa al valor medio depende de éste y de la cantidad de looks utilizados para generar la imagen y es indicador del grado

de homogeneidad de los datos del área en estudio, γ es un parámetro de escala relacionado con el brillo de cada uno de los tipos de región presentes en la imagen y es importante para la caracterización estadística de las diferentes áreas de una escena y n es el parámetro correspondiente a la cantidad de looks con que fue generada la imagen, es un parámetro global, es decir, es el mismo para toda la imagen. Gráficamente esta variación se refleja en las funciones de densidad de la distribución \mathcal{G}_A^0 e induce a una discriminación según los valores que toman los tres parámetros. Las figuras 3-31, 3-32 y 3-33 muestran las densidades de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ cuando se varía el parámetro α , el parámetro γ y el parámetro n , respectivamente. Se puede notar claramente que cuando α toma valores cercanos a 0 la varianza crece y lo mismo sucede cuando γ crece, con respecto al parámetro n , cuando este crece la curva se hace más Gaussiana.

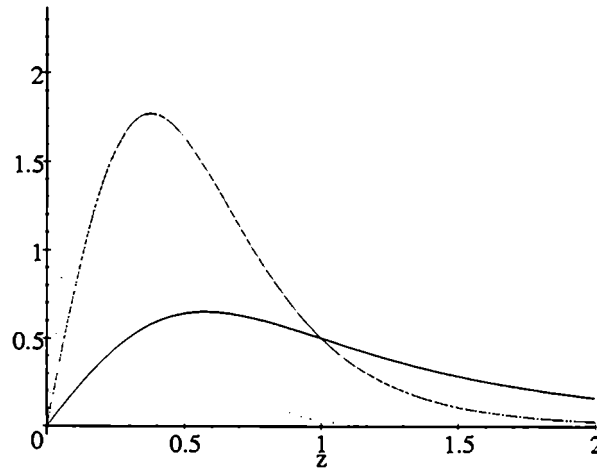


Figura 3-31: Densidades $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ para $\alpha = -1$ (sólida), $\alpha = -4$ (rayada) y $\alpha = -8$ (punteada)

Propiedad 34 La función de densidad de la distribución \mathcal{G}_A^0 es unimodal y es:

$$z = \sqrt{\frac{\gamma(2n-1)}{n(1-2\alpha)}}, \quad \gamma, -\alpha, n > 0$$

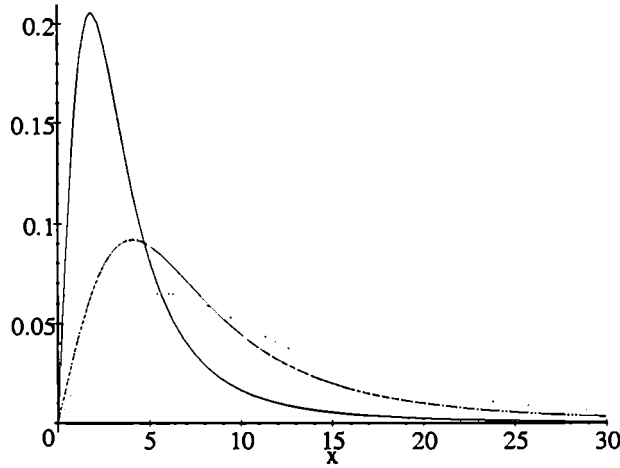


Figura 3-32: Densidades $\mathcal{G}_A^0(-1, \gamma, 1)$ para $\gamma = 10$ (sólida), $\gamma = 50$ (rayada) y $\gamma = 100$ (punteada), resp.

Consideremos el parámetro de escala $\gamma = 1$ y $n = 1$ y veamos la variación de la moda con respecto al parámetro de rugosidad α . Como se muestra en la figura 3-34, se puede observar que para datos provenientes de áreas homogéneas la moda se acerca a 0 pero cuando éstos provienen de áreas extremadamente heterogéneas tiende al valor 1. Se ve que si $-1 < \alpha < 0$ entonces $\sqrt{\frac{1}{3}} < z < 1$ y si $\alpha < -1$ se tiene que $z < \sqrt{\frac{1}{3}}$. Si consideramos $n = 1$ y cualquier valor del parámetro γ se tendremos que $\sqrt{\frac{2}{3}} < z < \sqrt{\gamma}$ si $-1 < \alpha < 0$ y que $z < \sqrt{\frac{1}{3}}$ para $\alpha < -1$. La figura 3-35 muestra también la variación de la moda con respecto al parámetro α pero considerando datos con media unitaria y el parámetro γ definido teniendo en cuenta esta condición en función de α y n . La variación de la moda con respecto a los dos parámetros α y γ dejando fijo el número de looks, en este caso $n = 1$, se muestra en la figura 3-36.

En la figura 3-36 se muestra la variación de la moda con respecto al número de looks n para α y γ fijos, en este caso se consideró $\gamma = 1$ y $\alpha = -1$ (arriba), $\alpha = -10$ (medio) y $\alpha = -50$ (abajo). Se muestran también las respectivas asíntotas $\sqrt{\frac{2\gamma}{1-2\alpha}}$ en línea punteada. Vemos que en todos los casos la moda es una función creciente con respecto al número de looks, y para cada α la variación de esta curva es $\sqrt{\frac{\gamma}{1-2\alpha}} < z < \sqrt{\frac{2\gamma}{1-2\alpha}}$.

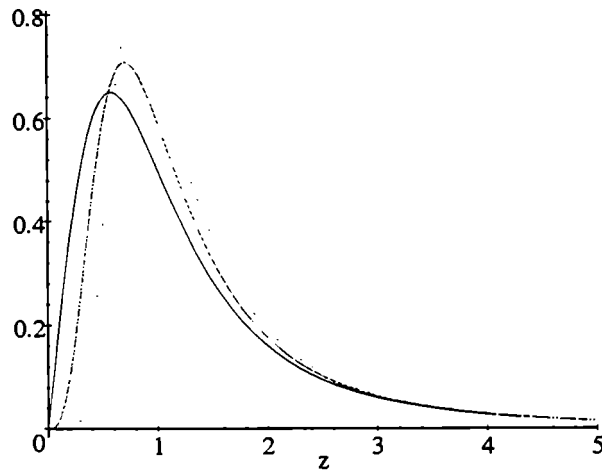


Figura 3-33: Densidades $\mathcal{G}_A^0(-1, 1, n)$ para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 10$

Propiedad 35 Los momentos de orden r de la distribución \mathcal{G}_A^0 son

$$E(Z_A^r) = \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{r/2} \frac{\Gamma(n+r/2) \Gamma(-\alpha-r/2)}{\Gamma(n) \Gamma(-\alpha)}, \text{ para } -\alpha, \gamma, n > 0 \quad (3.28)$$

Estos serán utilizados en las definiciones que siguen y serán estimados en el Capítulo 4

Propiedad 36 La Varianza de la distribución \mathcal{G}_A^0 es:

$$\sigma^2 = \frac{\gamma(n\Gamma^2(n)(-\alpha-1)\Gamma^2(-\alpha-1) - \Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(-\alpha-1/2))}{n\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha)} \text{ para } -\alpha > 1, \gamma, n > 0$$

La varianza es una función creciente de α , como se puede ver en la figura 3-38 que muestra la varianza en función del parámetro α , para $n = 1$ y $\gamma = 1$. La figura 3-39 muestra la varianza en función de los parámetros α y γ , para $n = 1$. Se puede notar que la varianza depende linealmente del parámetro γ .

Propiedad 37 Coeficiente de Asimetría

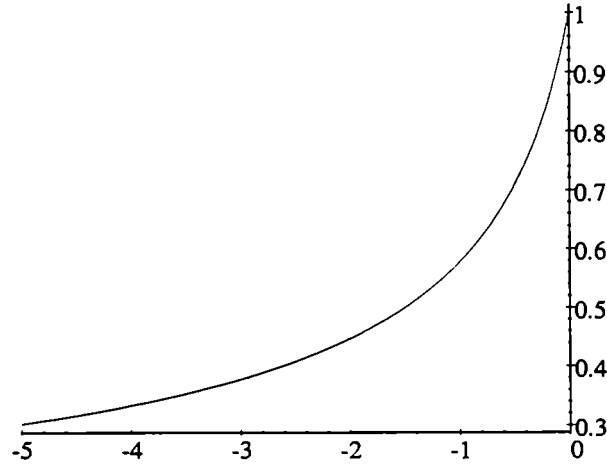


Figura 3-34: Variación de la moda de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$

De las fórmulas de la sección 15, tenemos que el coeficiente de asimetría es:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E^3(X)}{(E(X^2) - E^2(X))^3}$$

donde μ_3 es el momento central de orden 3 y σ^3 es la varianza elevada a la potencia $\frac{3}{2}$.

Desarrollemos primero μ_3

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{3/2} \left[\frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(-\alpha-3/2)}{\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)} + 2\frac{\Gamma^3(n+1/2)\Gamma^3(-\alpha-1/2)}{\Gamma^3(n)\Gamma^3(-\alpha)} - \right. \\ &\quad \left. - 3\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-\alpha-1)\Gamma(n+1/2)\Gamma(-\alpha-1/2)}{\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha)} \right] \\ &= \frac{\gamma^{3/2}}{n^{3/2}\Gamma^3(n)\Gamma^3(-\alpha)} [\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(n+3/2)\Gamma(-\alpha-3/2) + \\ &\quad + 2\Gamma^3(n+1/2)\Gamma^3(-\alpha-1/2) - \end{aligned}$$

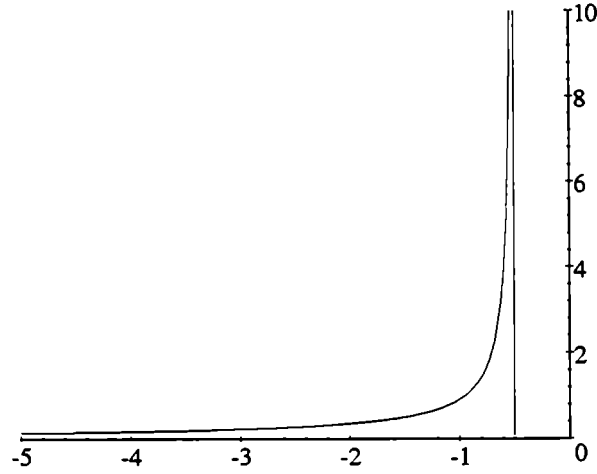


Figura 3-35: Variación de la moda con respecto al parámetro α para datos de media unitaria

$$-3n(-\alpha - 1)\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha - 1)\Gamma(n + 1/2)\Gamma(-\alpha - 1/2)] \quad (3.29)$$

Dividiendo μ_3 por σ^3 y llamando $T(\alpha, n)$ al factor que está entre corchetes en (3.29), obtenemos el coeficiente de asimetría

$$\gamma_1(\alpha, n) = \frac{T(\alpha, n)}{(n\Gamma^2(n)(-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1) - \Gamma^2(n + 1/2)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^{3/2}} \quad (3.30)$$

Es interesante notar que la ecuación (3.30) no depende del parámetro γ y que, como era de esperar, γ_1 es creciente con respecto al parámetro de rugosidad α , esto es a mayor homogeneidad menor asimetría. Se puede ver en la figura 3-40 la variación del coeficiente de asimetría γ_1 en función del parámetro α , para número de looks $n = 1$. Se podría esperar un comportamiento similar en el número de looks, es decir, analizando dos histogramas de la misma área y de imágenes con diferentes número de looks, uno tendería a decir que el menos simétrico está formado con los datos que provienen de la imagen con menor número de looks, pero resulta que esta es una afirmación falsa. En la figura 3-41 se muestran las curvas que corresponden a la variación del coeficiente de asimetría γ_1 en función del número de looks. Cada una representa diferentes áreas que abarcan desde las extremadamente heterogéneas (arriba) hasta las muy

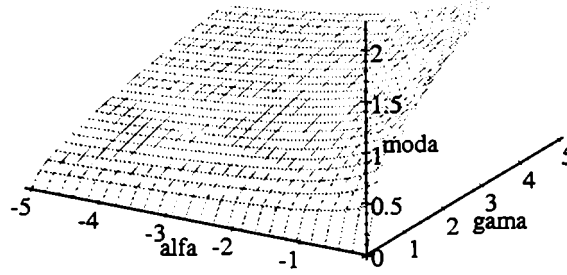


Figura 3-36: Variación de la moda en función de α y γ , para $n = 1$

homogéneas (abajo), $\alpha \in \{-1.6, -4, -10, -100\}$. Se puede observar que el mínimo de γ_1 es alcanzado, en diferentes valores de n según la heterogeneidad de área considerada, es decir según el parámetro α . Todas las funciones $\gamma_1(n)$ son crecientes en el número de looks, a partir de un cierto punto, el cual es un comportamiento no esperado pues lo que se esperaría que suceda es que γ_1 sea decreciente con el número de looks. Vemos en el caso de datos provenientes de áreas muy heterogéneas, por ejemplo $\alpha = -1.6$ donde la mayor simetría es alcanzada en $n = 1$. Es decir, no siempre que comparamos dos histogramas, podemos concluir que el más simétrico es el que proviene de datos con mayor número de looks.

Propiedad 38 *Coficiente de Curtosis*

De las fórmulas de la sección 15 el coeficiente de curtosis

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X - E(X))^4}{(E(X^2) - E^2(X))^2} - 3$$

Tenemos que: $E(X - E(X))^4 = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X)$ reem-

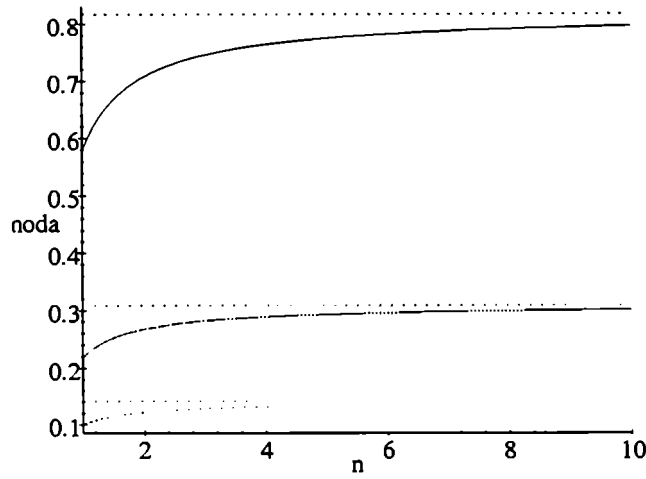


Figura 3-37: Variación de la moda con respecto al número de looks. Se consideró $\gamma = 1$ y $\alpha = -1$ (sólida), $\alpha = -10$ (rayada), $\alpha = -50$ (punteada). La recta horizontal corresponde a la asíntota $\sqrt{\frac{2\gamma}{1-2\alpha}}$

plazando

$$\begin{aligned} \mu_4 = & \left(\frac{\gamma}{n}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(n+2) \Gamma(-\alpha-2)}{\Gamma(n) \Gamma(-\alpha)} - \right. \\ & -4 \frac{\Gamma(n+3/2) \Gamma(-\alpha-3/2) \Gamma(n+1/2) \Gamma(-\alpha-1/2)}{\Gamma^2(n) \Gamma^2(-\alpha)} + \\ & \left. +6 \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(-\alpha-1) \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(-\alpha-1/2)}{\Gamma^2(n) \Gamma^2(-\alpha)} - 3 \frac{\Gamma^4(n+1/2) \Gamma^4(-\alpha-1/2)}{\Gamma^4(n) \Gamma^4(-\alpha)} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado la varianza al cuadrado es:

$$\sigma^4 = \frac{\gamma^2 (n \Gamma^2(n) (-\alpha-1) \Gamma^2(-\alpha-1) - \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(-\alpha-1/2))^2}{n^2 \Gamma^4(n) \Gamma^4(-\alpha)}$$

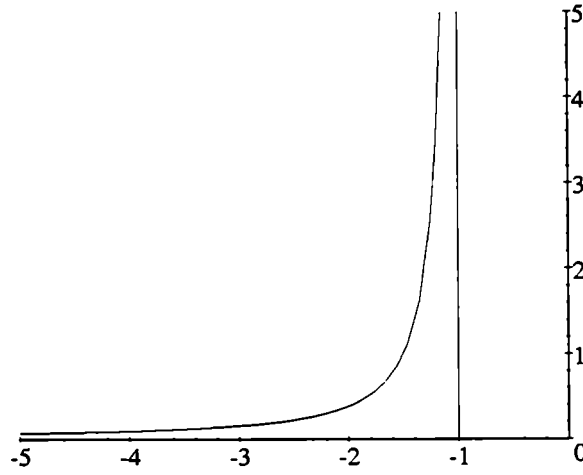


Figura 3-38: Varianza de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α , para $n = 1$ y $\gamma = 1$

Llamando

$$\begin{aligned}
 S(\alpha, n) = & \Gamma(n+2) \Gamma(-\alpha-2) \Gamma^3(n) \Gamma^3(-\alpha) - \\
 & -4\Gamma(n+3/2) \Gamma(-\alpha-3/2) \Gamma(n+1/2) \Gamma(-\alpha-1/2) \Gamma^2(n) \Gamma^2(-\alpha) + \\
 & +6\Gamma(n+1) \Gamma(-\alpha-1) \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(-\alpha-1/2) \Gamma^2(n) \Gamma^2(-\alpha) - \\
 & -3\Gamma^4(n+1/2) \Gamma^4(-\alpha-1/2)
 \end{aligned}$$

Tenemos que la curtosis es:

$$\gamma_2(\alpha, n) = \frac{S(\alpha, n)}{(n\Gamma^2(n)(-\alpha-1)\Gamma^2(-\alpha-1) - \Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(-\alpha-1/2))^2}$$

que tampoco depende del parámetro de escala γ . La variación de este coeficiente en función del parámetro α para $n = 1$, se muestra en la figura 3-42.

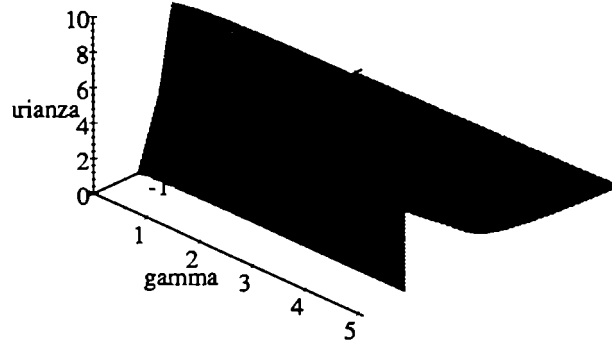


Figura 3-39: Varianza de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función de los parámetros α y γ , para $n = 1$.

Propiedad 39 *El coeficiente de variación de la distribución \mathcal{G}_A^0 es:*

$$CV = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-\alpha-1)\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha)}{\Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(-\alpha-1/2)} - 1} \quad (3.31)$$

Dado que el coeficiente de variación de una distribución está definido como:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{E(X^2)}{E^2(X)} - 1}$$

utilizando la fórmula (3.28) de los momentos de la distribución \mathcal{G}_A^0 se tiene que

$$E(X^2) = \left(\frac{\gamma}{n}\right) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)} \text{ y } E^2(X) = \left(\frac{\gamma}{n}\right) \frac{\Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(-\alpha-1/2)}{\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha)}$$

y por lo tanto es válido (3.31)

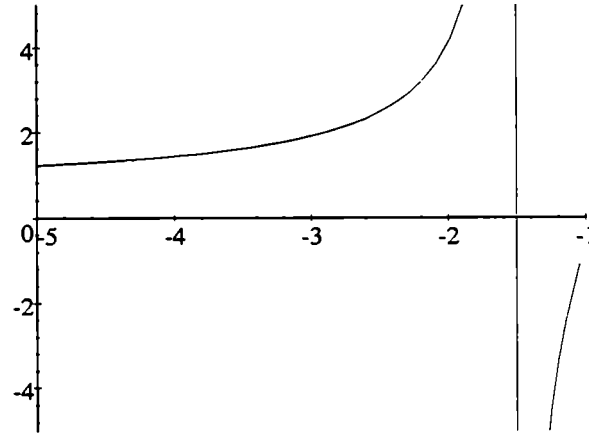


Figura 3-40: Coeficiente de asimetría γ_1 en función del parámetro α , para $n = 1$

3.3.6 Comparación entre las densidades de las distribuciones K_A y G_A^0

Para clarificar lo que hemos visto hasta ahora, con respecto a las distribuciones K_A y G_A^0 analizaremos la variación de los parámetros de cada una de ellas y mostraremos en diferentes gráficos su comportamiento a modo de comparación. De la fórmula de los momentos de orden r de la distribución G_A^0 se obtiene el valor del parámetro γ :

$$\gamma = n \left(\frac{\Gamma(n) \Gamma(-\alpha) E(Z_A^r)}{\Gamma(n+r/2) \Gamma(-\alpha-r/2)} \right)^{2/r}$$

y de los momentos de orden r de la distribución K_A se obtiene el parámetro λ :

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\frac{\Gamma(n+r/2) \Gamma(\alpha+r/2)}{\Gamma(n) \Gamma(\alpha) E(Z_A^r)} \right)^{2/r}$$

En las figuras 3-43 y 3-44, se muestra la variación los parámetros de γ^* y de λ^* con respecto a los parámetros (α_G, n) y (α_K, n) , respectivamente. Las figuras 3-45 y 3-46 son un corte de las anteriores para $n = 1$, respectivamente. Los parámetros de γ^* y de λ^* corresponden a los

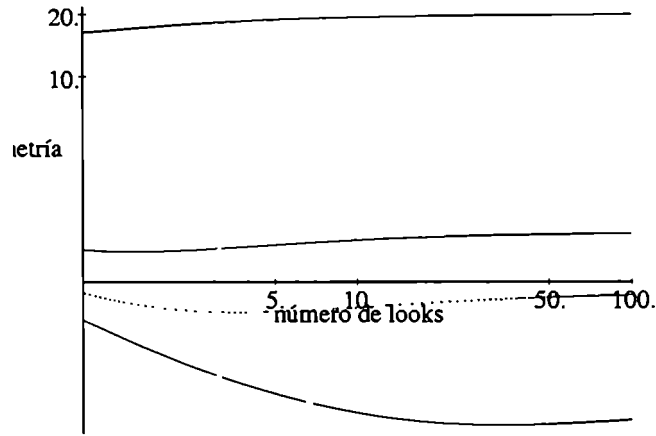


Figura 3-41: Coeficiente de asimetría en función del número de looks n , para $\alpha \in \{-100, -10, -4, -1.6\}$ gráfica en escala log-log

parámetros λ y γ tal que la media sea unitaria, es decir:

$$\gamma^* = n \left(\frac{\Gamma(n) \Gamma(-\alpha_G)}{\Gamma(n+1/2) \Gamma(-\alpha_G-1/2)} \right)^2 \quad (3.32)$$

y

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \left(\frac{\Gamma(n+1/2) \Gamma(\alpha_K+1/2)}{\Gamma(n) \Gamma(\alpha_K)} \right)^2 \quad (3.33)$$

De las ecuaciones 3.32 y 3.5 obtenemos:

$$\gamma^* \lambda^* = \left(\frac{h_1(\alpha_G)}{h_2(\alpha_K)} \right)^2$$

donde

$$h_1(\alpha_G) = \frac{\Gamma(-\alpha_G)}{\Gamma(-\alpha_G-1/2)} \text{ y } h_2(\alpha_K) = \frac{\Gamma(\alpha_K)}{\Gamma(\alpha_K+1/2)}$$

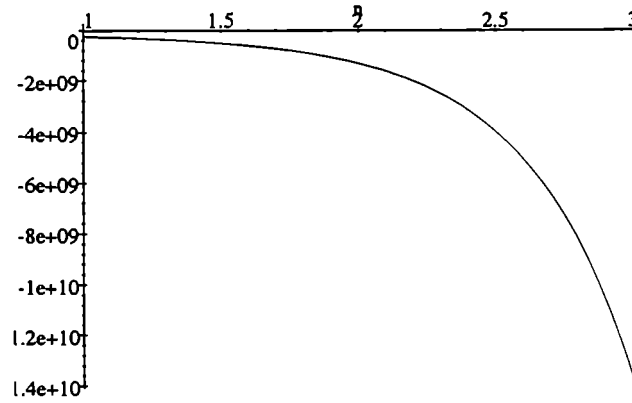


Figura 3-42: Variación del coeficiente de curtosis de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α , para número de looks $n = 1$

En la figura 3-47 se muestra la gráfica $\gamma^*\lambda^*$ en función de α_G y de α_K . Si hacemos una correspondencia entre α_G y α_K tal que $\alpha_G = -\alpha_K$ entonces tendremos la relación

$$\gamma^*\lambda^* = (\alpha_K - 1/2)^2$$

lo que nos dá una idea de como varían estos parámetros, uno en función del otro, en el caso en que α_G tome un valor igual a α_K cambiado de signo, o que esté bastante próximo a este. Esto nos servirá para entender las cálculos efectuados en la aproximación de la distribución \mathcal{G}_A^0 y la distribución \mathcal{K}_A .

La figura 3-48 muestra cuatro densidades correspondientes a las distribuciones $\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda^*, n)$ y $\mathcal{G}_A(\alpha_G, \gamma^*, n)$, cuando $\alpha_K = 1$ y $\lambda^* = 0.616$, $\alpha_G = -1$ y $\gamma^* = 0.405$, $\alpha_K = 10$, $\lambda^* = 7.66$, $\alpha_G = -10$ y $\gamma^* = 11.782$, en todos los casos se consideró $n = 1$. Se puede notar la diferencia entre las curvas cuando el parámetro de rugosidad para ambas distribuciones toma valores cercanos a 0. En particular, la diferencia que hay entre las dos distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A cuando el parámetro $\alpha_G = -1$ y $\alpha_K = 1$, en este caso las densidades son muy diferentes mientras que para $\alpha_G = -10$ y $\alpha_K = 10$ las densidades de ambas distribuciones son muy parecidas. En el Capítulo 6 se podrá ver numéricamente la distancia entre ambas distribuciones y que esta distancia es menor cuanto más alejado del valor 0 estén α_K y α_G .

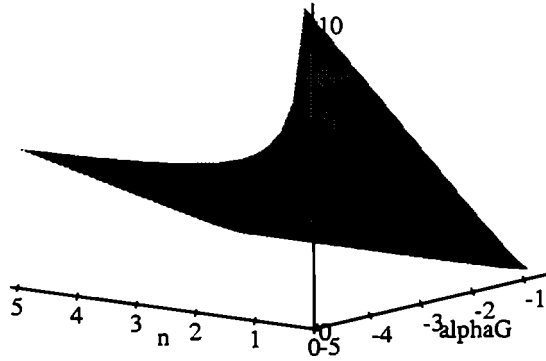


Figura 3-43: Gráfico de γ^* (media unitaria), en función de α y n .

Para tener una idea más clara de cuál es la curva que tiene más varianza, o sea la que correspondería en el ajuste de datos muy heterogéneos, calculemos los coeficientes de variación (CV) de ambas distribuciones, recordando que menor CV significa menor varianza relativa al valor medio, es decir, cuando los datos corresponden a áreas más homogéneas. Usando la fórmula (3.23) calculamos los coeficientes de variación de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A , que los denotaremos CV_K y CV_G , respectivamente y vienen dados por:

$$CV_K = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(\alpha+1/2)}} - 1, \quad CV_G = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-\alpha-1)\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2(n+1/2)\Gamma^2(-\alpha-1/2)}} - 1$$

En la tabla 3.7 se muestran los valores de CV_K y de CV_G para diferentes valores del parámetro de rugosidad α de cada distribución, en ambos casos se consideró $n = 1$. Se puede notar que cuando $\alpha_G \rightarrow -1^-$ entonces $CV_G \rightarrow +\infty$ y significa que la varianza es muy grande para estos valores de α , en cambio cuando el parámetro $\alpha_K = 1$ se tiene $CV_K = 0.788$, que nos indica que hay menos varianza. Las figuras 3-49 y 3-50 muestran la variación de los coeficientes CV_K y CV_G en función del parámetro α de cada distribución, respectivamente. Por lo analizado hasta ahora podemos inferir que para los datos que provienen de zonas extremadamente heterogéneas el mejor modelo es el de la distribución \mathcal{G}_A .

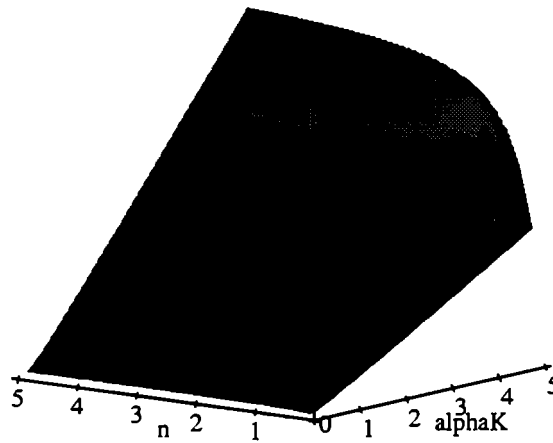


Figura 3-44: Gráfico del parámetro λ^* (media unitaria), en función de α y n .

Este capítulo ha sido dedicado especialmente a presentar el modelo multiplicativo y las diferentes distribuciones con que se modelan el *speckle*, el *backscatter* y el retorno. Se enunciaron las propiedades más importantes e interesantes de cada caso particular y se ilustró, cuando fue posible, con gráficos de las funciones. Se estudió el comportamiento de los parámetros, así como la variación de los parámetros para cada una de ellas, se hizo una comparación entre las diferentes distribuciones con el que modela el *backscatter*.

$\Gamma^{1/2}$	
α	λ^*
0.5	0.3183
1	0.7854
2	1.7671
3	2.7612
4	3.7583
10	9.7532

Tabla 3.5: Valores del parametro λ en funcion del parametro α para media unitaria

$\Gamma^{-1/2}$	
α	γ^*
-0.8	0.1514
-1	0.3183
-2	1.2732
-3	2.2635
-4	3.2595
-10	9.2534

Tabla 3.6: Valores del parámetro γ en funcion del parámetro α para media unitaria

α_K	CV_K	α_G	CV_G
1	0.788	-1.	$+\infty$
2	0.664	-2	0.788
4	0.595	-4	0.619
10	0.552	-10	0.555

Tabla 3.7: Coeficientes de Variación de la distribución K y de la distribución G

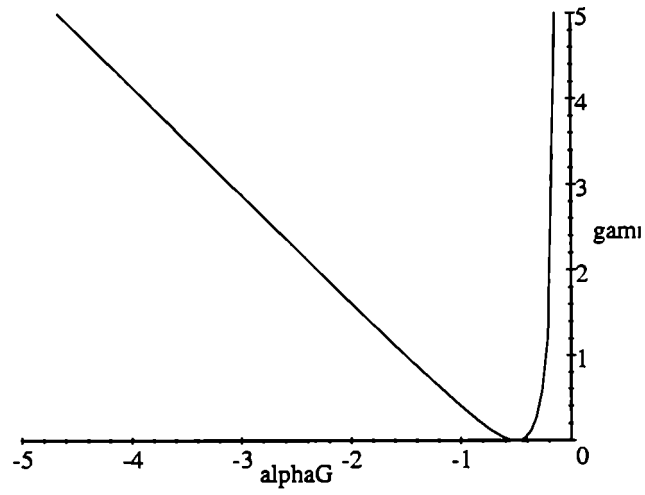


Figura 3-45: Variación del parámetro γ^* de la distribución \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α_G , para $n = 1$

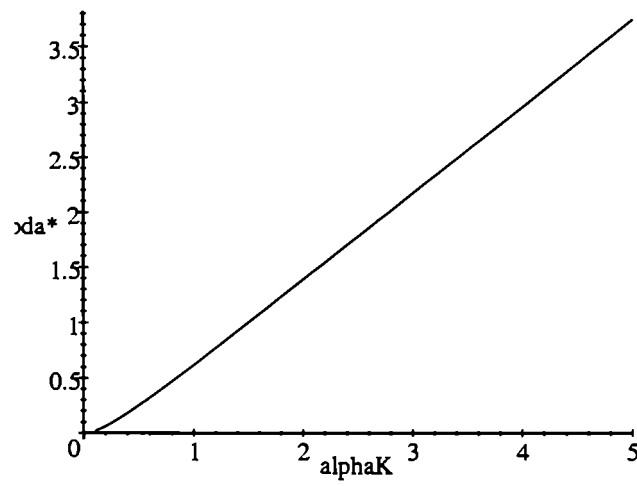


Figura 3-46: Variación del parámetro λ^* de la distribución \mathcal{K}_A en función del parámetro α , para $n = 1$

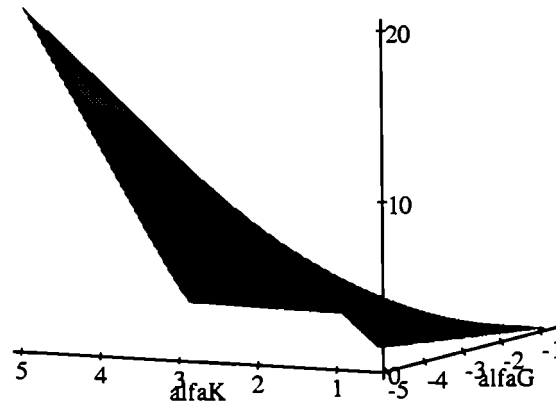


Figura 3-47: Variación de $\lambda^*\gamma^*$ en función de α_K y α_G

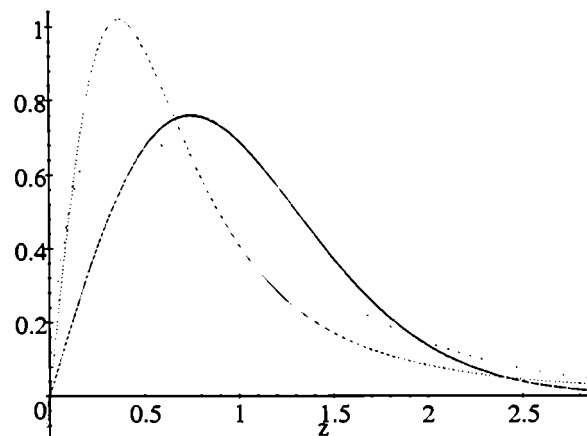


Figura 3-48: Curvas correspondientes a las densidades $\mathcal{K}_A(10, 7.66, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A(-10, 11.78, 1)$ (rayada) y $\mathcal{K}_A(1, 0.616, 1)$ (punteada) y $\mathcal{G}_A(-1, 0.405, 1)$ (punto línea)

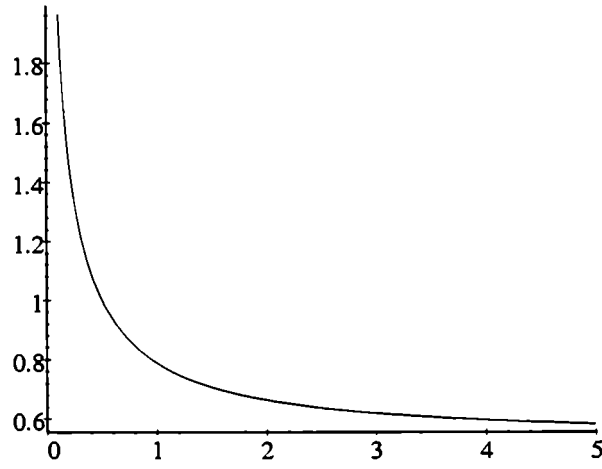


Figura 3-49: Curva del coeficiente de variación CV_K de la distribución \mathcal{K}_A , en función del parámetro α , para $n = 1$

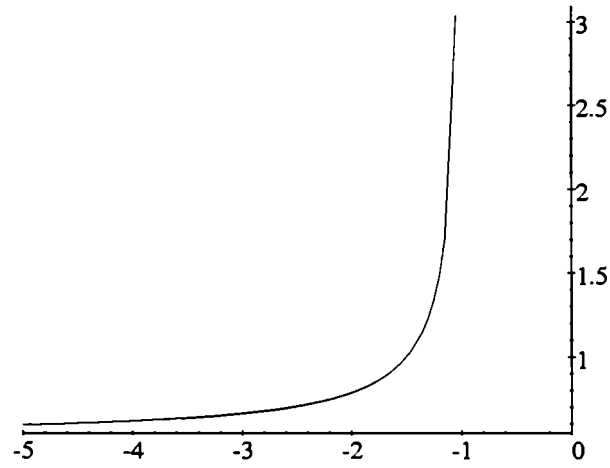


Figura 3-50: Curva del coeficiente de variación CV_G de la distribución \mathcal{G}_A^0 , en función del parámetro α , para $n = 1$

Capítulo 4

Estimación de Parámetros

Para extraer la información que proveen las imágenes SAR y hacer uso de ella, se modelan los datos de manera tal que solamente con algunos parámetros se logra una completa caracterización de esta información. La inferencia estadística es una herramienta ampliamente utilizada en procesamiento de imágenes en general y en particular en el de imágenes SAR. Entre las diferentes aplicaciones de la estimación de parámetros en procesamiento de imágenes, se encuentran el filtrado de imágenes, donde se utilizan muestras pequeñas pero con presencia de valores muy distorsionados que se desean remover o en segmentación y clasificación de imágenes, donde se consideran muestras de tamaño grande, no necesariamente ruidosas, que poseen alguna característica determinada para su agrupamiento. Tal como ya se ha visto, el modelo propuesto para el retorno de las imágenes SAR depende de tres parámetros: rugosidad, escala y de procesamiento que es el número de looks. La variación de éstos dentro de un espacio de parámetros adecuadamente definido, nos indicará las diferentes clases de datos presentes en las imágenes. Es por este motivo que se requiere un profundo conocimiento del comportamiento de cada uno de los parámetros, que se llevará a cabo mediante la estimación de cada uno de ellos para luego dejar paso a la interpretación de la realidad, es decir la caracterización de la información a partir de esta inferencia.

En este capítulo se presentarán los diferentes métodos de estimación para los parámetros de rugosidad y de escala de la distribución \mathcal{G}_A^0 y de la distribución \mathcal{K}_A , recordando que el parámetro correspondiente al número de looks lo consideraremos conocido para ambas distribuciones. Se presentarán técnicas usuales de inferencia, basadas en momentos, máxima verosimilitud y

estadísticos de orden. También se presentará el estimador de la transformación logarítmica. Se mostrará que la estimación, en algunos de los métodos mencionados, lleva involucrados cálculos muy complejos cuando se trata de la distribución \mathcal{K}_A , lo que deja en evidencia, una vez más, la preferencia de la distribución \mathcal{G}_A^0 sobre la distribución \mathcal{K}_A . Se diseñará una experiencia de Monte Carlo para comparar el comportamiento de los estimadores cuando se trata de la distribución \mathcal{G}_A^0 . La aplicación de los métodos de estimación, recién mencionados, de los parámetros de la distribución \mathcal{G}_A^0 se hará en el siguiente capítulo. Se simularán imágenes SAR sobre las que se compararán los diferentes estimadores que se propusieron en este capítulo, utilizando el método de Monte Carlo.

4.1 Métodos de estimación

Cuando se utilizan las imágenes SAR es muy importante saber de manera precisa con qué tipos de áreas se está trabajando. Una de las técnicas usadas para lograr este objetivo es la inferencia estadística, se puede ver en [JPW93, Rag91, VF98] donde se tratan técnicas de estimación de parámetros de distribuciones involucradas en datos SAR.

Dentro del modelo multiplicativo se relaciona el parámetro α con la rugosidad o textura del área de interés en la imagen. Es evidente, entonces, la importancia de estimar el parámetro α , ya que permite estimar la rugosidad que es una cantidad que discrimina diferentes áreas independiente de la señal de incidencia. El parámetro γ es un parámetro de escala y está asociado con la amplitud del backscatter y se puede estimar utilizando áreas grandes. Para zonas pequeñas se puede suponer que γ es constante, y estimar así el parámetro α para pequeñas áreas. Sin pérdida de generalidad, se puede elegir γ , ya que es un parámetro de escala, para cada α de interés de tal forma que cumpla que $\mathbb{E}(Z_A) = 1$. De esta manera todas las densidades serán comparables por su media. Podemos, entonces realizar el estudio de inferencia del parámetro α , suponiendo el parámetro γ conocido. En este trabajo también se hará la estimación conjunta de los parámetros (α, γ) , debido a que aún cuando el parámetro γ sea de escala, se verá en las aplicaciones que también discrimina áreas de diferentes texturas, por lo tanto tiene especial interés en la clasificación de imágenes SAR.

En este estudio suponemos que los datos son observaciones de variables aleatorias indepen-

dientes distribuídas $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$.

Se han utilizado diferentes técnicas de estimación, entre ellas las más importantes son las basadas en los métodos de máxima verosimilitud (MV), en el método de los momentos muestrales (MO) y en estadísticos de orden. Estos métodos pueden ser aplicados a los datos originales o a los datos después de transformados. El estimador por MV es optimal ya que para muestras grandes este es un estimador insesgado y eficiente. El estimador MO está basado en el método de substitución, donde los momentos teóricos serán reemplazados por los momentos muestrales, de los que se deducirán los parámetros que se desean estimar. Este último tiene la ventaja de ser muy simple de obtener, pero no es insesgado. Con respecto a los estadísticos de orden, estos han sido tradicionalmente utilizados en filtrado de imágenes, especialmente en los casos donde los filtros lineales funcionan pobremente, por ejemplo, en imágenes con ruido impulsivo, o ruido multiplicativo o cuando las imágenes no siguen el modelo Gaussiano. También han sido usados para incorporar la robustez en los procedimientos de inferencia, pero, en algunos casos son bastante más complicados de calcular que los anteriores y es más difícil de deducir sus propiedades muestrales. Entre los estadísticos de orden el más utilizado es el de la mediana. También utilizaremos el rango intercuartil y el estimador basado en los cuartiles de orden 1, 2 y 3.

Para lograr técnicas de estimación más simples, también se trabaja con datos transformados, una de las transformaciones más usadas en datos SAR es considerar el logaritmo del retorno debido a que esta operación, al menos teóricamente, transforma la esencia multiplicativa del ruido en una forma más tratable que es la del ruido aditivo. Presentaremos en este capítulo el llamado estimador de la transformación logarítmica, que involucra a los logaritmos de los datos.

Para la estimación conjunta de los parámetros α y γ se utilizarán técnicas mixtas de MV y MO, en particular para la implementación computacional.

En esta sección se presentarán todos los métodos de estimación que utilizaremos en las secciones siguientes, se podrán ver más detalles en el Apéndice G.

1. Estimación por momentos

Sea (Z_1, Z_2, \dots, Z_N) un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con función de distribución F . Sea f una función real definida sobre \mathbb{R} tal que

$E(|f(Z)|) < \infty$. Entonces $E(|f(Z)|)$ puede ser estimada como

$$m_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(z_i). \quad (4.1)$$

En la ecuación (4.1), si la función f es la que hace corresponder $z \mapsto z^r$ con $r > 0$, entonces escribimos m_r en lugar de m_{z^r} . Los estimadores de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_t$ serán entonces soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Z_1)(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_t) = m_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Z_1^t)(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_t) = m_t. \end{cases}$$

Los estimadores obtenidos de esta manera son asintóticamente consistentes y asintóticamente distribuidos conjuntamente como una variable aleatoria normal multivariada.

2. Método de Máxima Verosimilitud (MV).

Sea $\mathbf{z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución F_θ , $\theta \in \Theta$, Θ espacio de parámetros. Supongamos, sin pérdida de generalidad que F_θ , admite una función de densidad f . El método de MV consiste en encontrar el conjunto de parámetros $\theta_1, \dots, \theta_t$ para el cual la función de verosimilitud

$$L(\theta_1, \dots, \theta_t | z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i=1}^N f(z_i; \theta_1, \dots, \theta_t)$$

sea máxima. A estos valores los denotaremos $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_t$. Estos estimadores son usualmente hallados por derivación de la función de verosimilitud o de su logaritmo.

3. Estadísticos de Orden

Los valores ordenados en forma creciente del vector $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, es decir

$$z_{N:1} \leq z_{N:2} \leq \dots \leq z_{N:N},$$

se denominan estadísticos de orden muestrales. Es intuitivo suponer que, bajo ciertas

condiciones, estos valores son comparables con los cuantiles teóricos de la distribución $F(\theta_1, \dots, \theta_t)$, como se muestra en la siguiente ecuación

$$Q_\alpha(\theta_1, \dots, \theta_t) = \min_{z \in \mathbb{R}} \{F(z; \theta_1, \dots, \theta_t) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1).$$

En la práctica, la comparación se hace entre los cuartiles, osea entre el primer cuartil ($Q_{1/4}$), el segundo cuartil o mediana ($Q_{1/2}$) y tercer cuartil ($Q_{3/4}$), o funciones de estos cuartiles. La mediana muestral de \mathbf{z} se define como:

$$\hat{Q}_{1/2}(\mathbf{z}) = \begin{cases} z_{N:(N+1)/2} & \text{si } N \text{ impar} \\ \frac{1}{2}(z_{N:N/2} + z_{N:N/2+1}) & \text{si } N \text{ par;} \end{cases} \quad (4.2)$$

el primer cuartil muestral de \mathbf{z} como:

$$\hat{Q}_{1/4}(\mathbf{z}) = \begin{cases} z_{N:(\ell+1)/2} & \text{si } \ell \text{ impar} \\ \frac{1}{2}(z_{N:\ell/2} + z_{N:\ell/2+1}) & \text{si } \ell \text{ par;} \end{cases} \quad (4.3)$$

y el tercer cuartil muestral de \mathbf{z} como:

$$\hat{Q}_{3/4}(\mathbf{z}) = \begin{cases} z_{N:(N+1-(\ell+1)/2)} & \text{si } \ell \text{ impar} \\ \frac{1}{2}(z_{N:N+1-\ell/2} + z_{N:N-\ell/2}) & \text{si } \ell \text{ par.} \end{cases} \quad (4.4)$$

En las ecuaciones (4.3) y (4.4) :

$$\ell = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ impar} \\ \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ par.} \end{cases}$$

4.2 Estimadores de los parámetros de la distribución \mathcal{K}_A .

En esta sección se tratarán los estimadores de los parámetros (α, λ) de la distribución \mathcal{K}_A , recordando que el parámetro n que corresponde al número de looks lo consideraremos conocido. En esta tesis, el método de estimación de los parámetros de la distribución \mathcal{K}_A , que se utilizó en las aplicaciones fue solamente el método de los momentos, aún así presentaremos aquí los otros métodos donde se podrá apreciar su complejidad, tanto teórica como de implementación

computacional. Una vez presentados, en la siguiente sección, los estimadores de los parámetros de la distribución \mathcal{G}_A^0 , comparativamente podremos llegar, una vez más, a la conclusión de la utilización de la distribución \mathcal{G}_A^0 en lugar de la distribución \mathcal{K}_A .

4.2.1 Estimación del parámetro α por el método de los momentos

Consideramos primero el caso cuando el parámetro λ es conocido y por lo tanto debemos estimar solamente el parámetro α .

Los momentos de orden r de la distribución \mathcal{K}_A son:

$$E(X^r) = \frac{1}{(\lambda n)^{r/2}} \frac{\Gamma(\alpha + r/2)\Gamma(n + r/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}, \alpha, \lambda, n > 0$$

Se usarán los momentos de orden $1/2$, 1 y 2 . Llamemos m_r a los momentos muestrales y $\hat{\alpha}_{m_{1/2}}$, $\hat{\alpha}_{m_1}$ y $\hat{\alpha}_{m_2}$ a los estimadores del parámetro α basados en los momentos de orden $1/2$, 1 y 2 , respectivamente. Quedan planteadas las siguientes ecuaciones.

$$m_{1/2} = \frac{1}{(\lambda n)^{1/4}} \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_{1/2}} + 1/4)\Gamma(n + 1/4)}{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_{1/2}})\Gamma(n)} \quad (4.5)$$

$$m_1 = \frac{1}{(\lambda n)^{1/2}} \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_1} + 1/2)\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_1})\Gamma(n)} \quad (4.6)$$

$$m_2 = \frac{1}{(\lambda n)} \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_2} + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_2})\Gamma(n)} = \frac{\hat{\alpha}_{m_2}}{\lambda} \quad (4.7)$$

El parámetro λ , en este caso depende del valor de α y de n , se lo eligió de tal manera que la media sea unitaria para facilitar la comparación con otras distribuciones, llamemoslo λ^* y viene dado por la siguiente fórmula:

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1/2)\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} \right)^2 \quad (4.8)$$

Luego, de las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) se tendrá que cada $\hat{\alpha}_{m_h}$ será solución de las ecuaciones de la forma

$$f_{m_h}(\hat{\alpha}_{m_h}) - \tau_{m_h} = 0, h = 1/2, 1, 2 \quad (4.9)$$

donde, para cada caso se tiene:

para el estimador $\hat{\alpha}_{m_{1/2}}$

$$f_{m_{1/2}}(\hat{\alpha}_{m_{1/2}}) = \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_{1/2}} + 1/4)}{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_{1/2}})}, \tau_{m_{1/2}} = \frac{m_{1/2}(\lambda n)^{1/4} \Gamma(n)}{\Gamma(n + 1/4)} \quad (4.10)$$

para el estimador $\hat{\alpha}_{m_1}$

$$f_{m_1}(\hat{\alpha}_{m_1}) = \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_1} + 1/2)}{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_1})}, \tau_{m_1} = \frac{m_1 \sqrt{\lambda n} \Gamma(n)}{\Gamma(n + 1/2)} \quad (4.11)$$

y para el estimador $\hat{\alpha}_{m_2}$

$$f_{m_2}(\hat{\alpha}_{m_2}) = \hat{\alpha}_{m_2}, \tau_{m_2} = m_2 \lambda \quad (4.12)$$

Notemos que τ_{m_h} es una variable aleatoria que depende de las muestras y de n . Vale para los tres casos que f_{m_h} son funciones continuas crecientes en $(0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{m_h}(\hat{\alpha}_{m_h}) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f_{m_h}(\hat{\alpha}_{m_h}) = 0$, por lo tanto, para cualquier valor que tome la variable aleatoria τ , estas ecuaciones siempre tendrán solución.

En la figura 4-1 se muestra el comportamiento de las tres curvas.

4.2.2 Estimador por máxima verosimilitud

Sea $\mathbf{z} = (Z_1, \dots, Z_k)$ un vector aleatorio, donde $Z_i \sim \mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$, $1 \leq i \leq k$. Consideraremos el estimador de máxima verosimilitud del parámetro α de la distribución $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ con el parámetro λ^* definido como en (4.8). Recordando la que la función de densidad de la distribu-

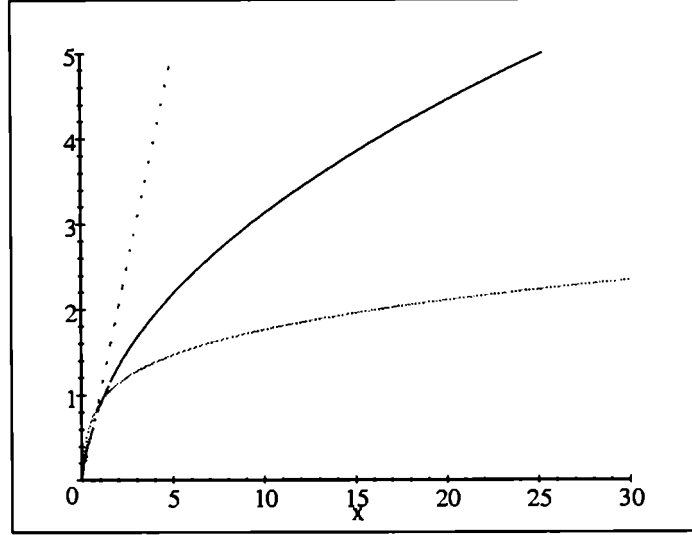


Figura 4-1: Gráficos de las funciones $f_{m_{1/2}}$, f_{m_1} y f_{m_2} (sólida, rayada y punteada, resp.)

ción \mathcal{K}_A es:

$$f_K(z) = \frac{4 \left(\sqrt{\lambda n} \right)^{\alpha+n}}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)} z^{n+\alpha-1} K_{\alpha-n} \left(2z\sqrt{\lambda n} \right), \quad \alpha_K, \lambda, n, z > 0, \quad (4.13)$$

Entonces hay que hallar el $\hat{\alpha}$ tal que:

$$\sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \ln f_K(z_i) = 0$$

Luego nos quedará la ecuación en

$$-k\Psi(\hat{\alpha}) + \frac{k}{2} (\ln \lambda^* + \ln n) + \sum_{i=0}^k \ln z_i + \sum_{i=0}^k \frac{\frac{\partial K_{\hat{\alpha}-n} \left(2z_i \sqrt{(\lambda^* n)} \right)}{\partial \hat{\alpha}}}{K_{\hat{\alpha}-n} \left(2z_i \sqrt{(\lambda^* n)} \right)} = 0,$$

como podemos observar en el último término se tiene la derivada respecto $\hat{\alpha}$ de la función modificada de Bessel. Pero esta variable aparece en el orden de la función de Bessel, que hace que el estimador de MV para el parámetro α de la distribución \mathcal{K}_A sea de complicada implementación computacional comparada con la del estimador de MV de la distribución \mathcal{G}_A^0 ,

como se verá en este capítulo en la sección 4.3, cuando se trate este estimador.

Cuando se quiere estimar los dos parámetros (α, λ) por este método hay que plantear también la derivada respecto del parámetro λ , es decir $\sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_K(z_i) = 0$

$$k \frac{\alpha + n}{2\lambda} + \sum_{i=0}^k \frac{K'_{n-\alpha} \left(2x_i \sqrt{\lambda n} \right)}{K_{n-\alpha} \left(2x_i \sqrt{\lambda n} \right)} x_i \sqrt{\frac{n}{\lambda}} = 0$$

aunque involucra la derivada de la función modificada de Bessel, en este caso la variable de diferenciación está en el argumento de esta función, lo que la hace más tratable.

4.2.3 Estimación conjunta de los parámetros (α, λ) por el método de los momentos.

En este caso, para estimar el parámetro α y λ es necesario estimar dos momentos, por ejemplo, $m_{1/2}$ y m_1 que nos dará el estimador $\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1}$, o m_1 y m_2 que nos dará el estimador $\hat{\alpha}_{m_1m_2}$. En el primer caso usando las ecuaciones (4.5) y (4.6) obtenemos:

$$\frac{\Gamma \left(\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1} + 1/2 \right) \Gamma \left(\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1} \right)}{\Gamma^2 \left(\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1} + 1/4 \right)} = \frac{m_1}{m_{1/2}^2} \frac{\Gamma^2 (n + 1/4)}{\Gamma (n + 1/2) \Gamma (n)}$$

y en el segundo caso, las ecuaciones (4.6) y (4.7) la ecuación resultante es:

$$\frac{\Gamma \left(\hat{\alpha}_{m_1m_2} + 1 \right) \Gamma \left(\hat{\alpha}_{m_1m_2} \right)}{\Gamma^2 \left(\hat{\alpha}_{m_1m_2} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{m_2}{m_1^2} \frac{\Gamma^2 (n + 1/2)}{\Gamma (n + 1) \Gamma (n)} \quad (4.14)$$

Entonces $\hat{\alpha}_{m_1m_k}$, para $k = 1/2, 2$, serán las soluciones de ecuaciones de la forma

$$f_{m_1m_k} \left(\hat{\alpha}_{m_1m_k} \right) - \tau_{m_1m_k} = 0 \quad (4.15)$$

Para $\hat{\alpha}_{m_1m_{1/2}}$ obtenemos

$$f_{m_1m_{1/2}} \left(\hat{\alpha}_{m_1m_{1/2}} \right) = \frac{\Gamma \left(\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1} + 1/2 \right) \Gamma \left(\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1} \right)}{\Gamma^2 \left(\hat{\alpha}_{m_{1/2}m_1} + 1/4 \right)}, \tau_{m_{1/2}m_1} = \frac{m_1}{m_{1/2}^2} \frac{\Gamma^2 (n + 1/4)}{\Gamma (n + 1/2) \Gamma (n)}$$

y para $\hat{\alpha}_{m_1 m_2}$ obtenemos

$$f_{m_1 m_2}(\hat{\alpha}_{m_1 m_2}) = \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{m_1 m_2} + 1) \Gamma(\hat{\alpha}_{m_1 m_2})}{\Gamma^2(\hat{\alpha}_{m_1 m_2} + \frac{1}{2})}, \tau_{m_1 m_2} = \frac{m_2}{m_1^2} \frac{\Gamma^2(n + 1/2)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n)}$$

La figura 4-2 muestra los gráficos de las dos funciones, $f_{m_1 m_{1/2}}$ y $f_{m_1 m_2}$ se puede observar que ambas son decrecientes y continuas en $(0, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{m_1 m_{1/2}}(\hat{\alpha}_{m_1 m_{1/2}}) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{m_1 m_2}(\hat{\alpha}_{m_1 m_2}) = 1$. Esto significa que cuando las variables aleatorias, $\tau_{m_{1/2} m_1}$ y $\tau_{m_1 m_2}$, tomen valores menores o iguales a 1 las ecuaciones (4.15), para $k = 1/2, 2$ no tendrán solución.

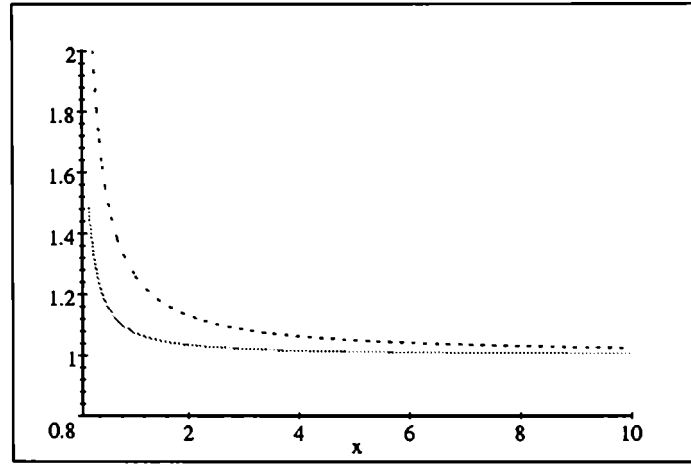


Figura 4-2: Gráficos de $f_{m_{1/2} m_1}$ (sólido) y $f_{m_1 m_2}$ (punteada)

4.2.4 Estimación del parámetro α utilizando estadísticos de orden, para λ conocido.

Para estos estimadores consideraremos al parámetro λ tal como en la ecuación (4.8). Serán considerados para estimar el parámetro α los siguientes estadísticos de orden: la mediana, la diferencia intercuartil y por último el que involucra al primer, segundo y tercer cuartil. Los denotaremos $\hat{\alpha}_{q_2}$, $\hat{\alpha}_{q_1, q_3}$ y $\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}$, respectivamente.

Estimador $\hat{\alpha}_{q_2}$

Este estimador está basado en la mediana de la distribución $\mathcal{KA}(\alpha, \lambda, n)$. Sea F la función de distribución acumulada de $\mathcal{KA}(\alpha, \lambda, n)$, y llamemos q_2 a su mediana, entonces el estimador $\hat{\alpha}_{q_2}$

es aquel que satisface la siguiente ecuación:

$$F(q_2; \hat{\alpha}_{q_2}, \lambda, n) = 1/2 \quad (4.16)$$

Recordemos que la función de distribución acumulada de la distribución $\mathcal{KA}(\alpha, \lambda, n)$ está dada por la siguiente fórmula recursiva. (Ver Capítulo 1, Sección 3.3.2).

$$F(x; \alpha, \lambda, n) = 1 + \frac{2^{2-\alpha-n}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} g(\nu, k, z)$$

donde $z = 2x\sqrt{\alpha n}$, $k = 2n - 1$, $\nu = \alpha - n$ y

$$g(\nu, k, z) = \begin{cases} -z^{\nu+1} K_{\nu+1}(z) & k = 1 \\ (k-1)(2\nu+k-1)g(\nu, k-2, z) - z^{\nu+k} K_{\nu+1}(z) - (k-1)z^{\nu+k-1} k_{\nu}(z) & k > 1 \end{cases}$$

Luego de la ecuación (4.16) y de la definición de la distribución acumulada de la distribución $\mathcal{KA}(\alpha, \lambda, n)$, el estimador $\hat{\alpha}_{q_2}$ es el que satisface la siguiente ecuación:

$$1/2 + \frac{2^{2-\hat{\alpha}_{q_2}-n}}{\Gamma(\hat{\alpha}_{q_2})\Gamma(n)} g(\nu, k, z_2) = 0$$

donde

$$z_2 = 2q_2 \sqrt{\hat{\alpha}_{q_2}} \sqrt{n}$$

y q_2 es la mediana muestral de \mathbf{x} como está definido en (4.2). Notemos que por la definición de la función F donde además de estar involucrada la función de Bessel viene dada en una forma recursiva, lo que hace muy dificultoso su tratamiento teórico como también su implementación computacional.

Estimador $\hat{\alpha}_{q_1, q_3}$

Este estimador está basado en el primer y en el tercer cuartiles y es la solución de la siguiente

ecuación:

$$F(q_3; \hat{\alpha}_{q_1, q_3}, \lambda, n) - F(q_1; \hat{\alpha}_{q_1, q_3}, \lambda, n) = 1/2$$

donde q_1 y q_3 son el primer y tercer cuartil muestral como está definido en (4.3) y en (4.4), luego reemplazando por la función de distribución acumulada tendremos:

$$\frac{2^{2-\hat{\alpha}_{q_1, q_3}-n}}{\Gamma(\hat{\alpha}_{q_1, q_3})\Gamma(n)}g(\nu, k, z_3) - \frac{2^{2-\hat{\alpha}_{q_1, q_3}-n}}{\Gamma(\hat{\alpha}_{q_1, q_3})\Gamma(n)}g(\nu, k, z_1) - 1/2 = 0$$

donde

$$z_1 = 2q_1 \sqrt{\hat{\alpha}_{q_1, q_3}} \sqrt{n} \text{ y } z_3 = 2q_3 \sqrt{\hat{\alpha}_{q_1, q_3}} \sqrt{n}$$

Estimador $\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}$

Este estimador está basado en el primer, segundo y tercer cuartil. Entonces $\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}$ es la solución de la siguiente ecuación:

$$F(q_3; \hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}, \lambda, n) - F(q_1; \hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}, \lambda, n) + F(q_2; \hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}, \lambda, n) = 1$$

reemplazando por el valor de la función acumulada F , tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{2^{2-\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}-n}}{\Gamma(\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3})\Gamma(n)}g(\nu, k, z_3) - \frac{2^{2-\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}-n}}{\Gamma(\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3})\Gamma(n)}g(\nu, k, z_1) + \\ & + \frac{2^{2-\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3}-n}}{\Gamma(\hat{\alpha}_{q_1, q_2, q_3})\Gamma(n)}g(\nu, k, z_2) - 1 = 0 \end{aligned}$$

donde q_1, q_2, q_3 son los cuartiles muestrales como están definidos en (4.2), (4.3) y (4.4), respectivamente.

4.2.5 Transformación Logarítmica

Sea Z_A una variable aleatoria con distribución $\mathcal{KA}(\alpha, \lambda, n)$, consideremos la variable aleatoria $W = \ln Z_A$. Consideremos las funciones generadoras de momentos de W , $\varphi_w(t) = E[e^{tw}]$,

entonces como $Z_A = X_A Y_A$, tenemos que $W = \ln X_A + \ln Y_A$ y $\varphi_w(t) = E[e^{tw}] = E[X_A]E[Y_A]$, $t \in \mathbb{R}$, donde $\varphi_w^{(k)}(0) = E[W^k]$ es el momento de orden k de W . Ver Anexo D. Consideramos el momento de orden 1:

$$\varphi_w'(0) = E[W] = E[\ln Z_A] = \Psi(\alpha) - \ln \alpha + \Psi(n) - \ln n$$

donde $\Psi(x)$ es la función digamma que se define de la siguiente manera:

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

El estimador por transformaciones logarítmicas que denotaremos $\hat{\alpha}_{\ln}$ es el que satisface la siguiente ecuación

$$m_1 - \Psi(n) + \ln n = \Psi(\hat{\alpha}_{\ln}) - \ln \hat{\alpha}_{\ln}$$

4.3 Estimadores de los parámetros de la distribución \mathcal{G}_A^0 .

En esta sección presentaremos los estimadores para los parámetros de la distribución \mathcal{G}_A^0 . Recordando que el parámetro n correspondiente al número de looks es conocido. Con respecto al parámetro γ se considerará dos casos, uno cuando se supone conocido y otro cuando no se conoce y por lo tanto hay que estimarlo. Veremos que en algunos casos los cálculos que se han efectuado para la distribución \mathcal{G}_A^0 son mucho más simples que los efectuado para la distribución \mathcal{K}_A y que estos corresponden a casos importantes en la estimación.

4.3.1 Estimación del parámetro α por el método de los momentos

Para la estimación del parámetro α , en esta sección consideraremos el parámetro de escala γ conocido, de tal manera que dependa de los parámetros α y n . Para poder comparar con otras distribuciones trabajaremos bajo la condición de que $E[Z_A] = 1$ y hallaremos los valores de γ que la cumplen. Los momentos de orden r de la distribución \mathcal{G}_A^0 están definidos como:

$$E[Z_A^r] = \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha - \frac{r}{2})\Gamma(n + \frac{r}{2})}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)}, \text{ para } \alpha < -\frac{r}{2} \quad (4.17)$$

Haciendo $r = 1$ tenemos que

$$E[Z_A] = \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)}, \alpha < -\frac{1}{2}$$

y considerando que $E[Z_A] = 1$, obtenemos valores de γ que dependen de α y de n y que denotaremos γ^* .

$$\gamma^* = n \left(\frac{\Gamma(-\alpha) \Gamma(n)}{\Gamma(-\alpha - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \right)^2 \quad (4.18)$$

Utilizaremos dos estimadores de los momentos de orden $1/2$ y de orden 1 , que denotaremos con $m_{1/2}$ y m_1 . Llamemos $\hat{\alpha}_{1/2}$ y $\hat{\alpha}_1$ a los estimadores del parámetro α correspondientes a cada caso. De las ecuaciones (4.17) para $r = 1$ y $r = 1/2$ y usando el γ definido como en (4.18), se tiene que los estimadores $\hat{\alpha}_{1/2}$ y $\hat{\alpha}_1$ son las soluciones de las siguientes ecuaciones, respectivamente :

$$\frac{\Gamma(-\hat{\alpha}_{1/2})}{\Gamma(-\hat{\alpha}_{1/2} - 1/4)} = (\gamma^*/n)^{1/4} \frac{\Gamma(n + 1/4)}{\hat{m}_{1/2}\Gamma(n)}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\Gamma(-\hat{\alpha}_1)}{\Gamma(-\hat{\alpha}_1 - 1/2)} = (\gamma^*/n)^{1/2} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\hat{m}_1\Gamma(n)}, \quad (4.20)$$

Para $r = 1/2, 1$ las ecuaciones (4.19) y (4.20) se pueden escribir de la forma

$$f(\hat{\alpha}_r) = \tau_r, \text{ para } r = 1/2, 1 \quad (4.21)$$

para facilitar su análisis y comprensión. Como $f(\hat{\alpha}_r)$ es una función continua y decreciente en $(-\infty, 0)$ y $\lim_{\hat{\alpha}_r \rightarrow -\infty} f(\hat{\alpha}_r) = \infty$, para $r = 1/2, 1$, siempre existirá solución para cada uno de estos casos. En la figura 4-3 se muestra la variación de las funciones $f(\hat{\alpha}_r)$ para $r = 1/2, 1$. Para la resolución numérica se utilizó el método de la secante.

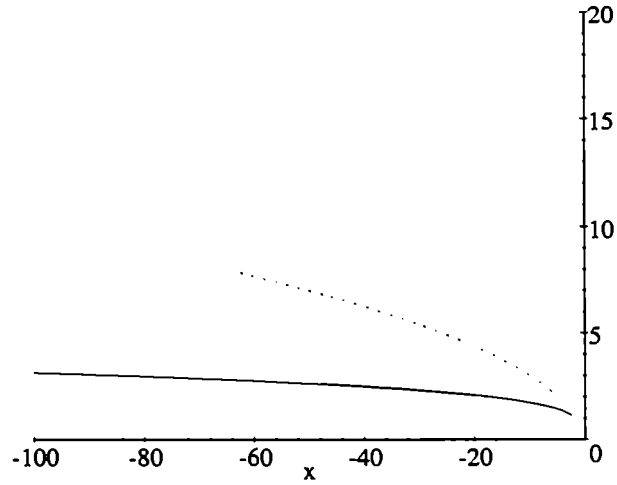


Figura 4-3: Gráficos de las funciones $f(\hat{\alpha}_r)$ para $r = 1/2$ (sólida) y $r = 1$ (punteada)

4.3.2 Transformación Logarítmica para estimar α cuando el parámetro γ es conocido

En esta sección vamos a trabajar con los datos transformados logarítmicamente y sus momentos. Sea Z_A una variable aleatoria con distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$, consideremos la variable aleatoria $W = \ln Z_A$. La función generadora de momentos de la variable W es $\varphi_W(t) = E[e^{tW}]$ y se cumple que $\varphi_W^{(k)}(0) = E[W^k]$, es decir que la derivada k -ésima evaluada en $t = 0$ es el momento de orden k de W .

Para $k = 1, 2$ se tiene

$$\varphi_W'(0) = E[W] \text{ y } \varphi_W''(0) = E[W^2]$$

donde

$$\varphi_W(t) = E[e^{tW}] = E[X^t] \cdot E[Y^t] = \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{t/2} \frac{\Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)}$$

Derivando la $\varphi_W(t)$ respecto de la variable t :

$$\begin{aligned}\varphi'_W(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{t/2} \ln\left(\frac{\gamma}{n}\right) \frac{\Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} + \\ &+ \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{t/2} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} \left[\Gamma'(-\alpha - t/2) \left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma(n + t/2) + \Gamma(-\alpha - t/2) \Gamma'(n + t/2) \left(\frac{1}{2}\right) \right]\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\varphi'_W(t) &= \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{t/2} \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} \left[\ln\left(\frac{\gamma}{n}\right) \Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2) - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma'(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2) + \Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma'(n + t/2) \right]\end{aligned}$$

haciendo $t = 0$ se obtenemos:

$$\begin{aligned}\varphi'_W(0) &= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} \left[\ln\left(\frac{\gamma}{n}\right) \Gamma(-\alpha)\Gamma(n) + \Gamma(-\alpha)\Gamma'(n) - \Gamma'(-\alpha)\Gamma(n) \right] \\ \varphi'_W(0) &= \frac{1}{2} \left[\ln\frac{\gamma}{n} + \Psi(n) - \Psi(-\alpha) \right]\end{aligned}$$

donde $\Psi(x) = \frac{\partial \ln \Gamma(x)}{\partial x}$ es la función digamma.

Entonces el momento de orden 1 de los datos transformados logarítmicamente es :

$$E[\ln Z] = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma}{n} + \Psi(n) - \Psi(-\alpha) \quad (4.22)$$

Halleemos ahora el estimador del parámetro α , que denotaremos $\hat{\alpha}_1^{\ln}$, conocido el parámetro γ . En este caso consideraremos a γ como se lo definió en la ecuación (4.18). Entonces el estimador $\hat{\alpha}_1^{\ln}$ será la solución de la ecuación:

$$\Psi(-\hat{\alpha}_1^{\ln}) = \ln \frac{\gamma^*}{n} + \Psi(n) - 2m_1^{\ln} \quad (4.23)$$

donde m_1^{\ln} es el estimador del momento de orden 1 de la variable aleatoria $\ln Z$, es decir, es la

media muestral de los logaritmos de los datos. Para seguir con la notación que venimos usando, podemos escribir la ecuación (4.23) como

$$f(\hat{\alpha}_1^{\ln}) = \tau$$

La función $f(\hat{\alpha}_1^{\ln})$, cuyo gráfico se muestra en la figura 4-4, es decreciente y continua en el intervalo $(-\infty, 0)$ y por lo tanto la ecuación (4.23) siempre tendrá solución. Todos los estimadores

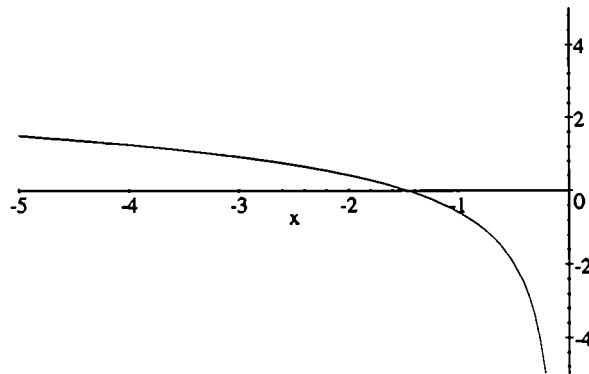


Figura 4-4: Gráfico de la función $\Psi(-\alpha)$

del parámetro α con γ fueron obtenidos numéricamente con el método Broyden.

4.3.3 Estimación del parámetro α por el método de máxima verosimilitud

Sea Z_1, \dots, Z_k una muestra aleatoria con distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ y sea la función de verosimilitud:

$$L(z_1, \dots, z_k; \alpha, \gamma) = \log \prod_{i=1}^k f(z_i)$$

Para hallar el estimador de máxima verosimilitud de α conocido el parámetro γ , en este caso

consideraremos γ^* como se lo definió en (4.18), planteamos la ecuación:

$$\sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial \alpha} \log f(z_i) = 0. \quad (4.24)$$

Recordando que la densidad de la distribución \mathcal{G}_A^0 es

$$f(z) = \frac{n^n}{\gamma^\alpha} \frac{2}{(\gamma + z^2 n)^{n-\alpha}} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} z^{2n-1}, \quad -\alpha, \gamma, n, z > 0$$

tomando logaritmo se tiene

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= n \ln n + \ln 2 - \alpha \ln \gamma + \ln \Gamma(n-\alpha) - (n-\alpha) \ln(\gamma + z^2 n) - \\ &\quad - \ln \Gamma(-\alpha) - \ln \Gamma(n) + (2n-1) \ln z \end{aligned}$$

Luego por la ecuación (4.24) nos queda:

$$\sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(z_i) = \sum_{i=0}^k (-\ln \gamma - \Psi(n-\alpha) + \ln(\gamma + z_i^2 n) + \Psi(-\alpha)) = 0$$

Entonces el estimador de máxima verosimilitud del parámetro α , que lo denotaremos $\hat{\alpha}_{ML}$, es la solución de la siguiente ecuación:

$$\Psi(n - \hat{\alpha}_{ML}) - \Psi(-\hat{\alpha}_{ML}) = -\ln \gamma^* + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\gamma^* + z_i^2 n) \quad (4.25)$$

La figura 4.25 muestra la función $\Psi(n - \hat{\alpha}_{ML}) - \Psi(-\hat{\alpha}_{ML})$ cuya imagen es $\mathbb{R}_{>0}$ y por lo tanto la ecuación (4.25) siempre tiene solución para los reales positivos.

4.3.4 Estimación del parámetro α utilizando estadísticos de orden

Los estimadores basados en la mediana ($\hat{\alpha}_{Med}$), en el rango intercuartil ($\hat{\alpha}_{IQR}$) y en ambos de estos estadísticos de orden ($\hat{\alpha}_{123}$) son, respectivamente soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$F_{Z_A}(\hat{Q}_{1/2}; \hat{\alpha}_{Med}) = \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

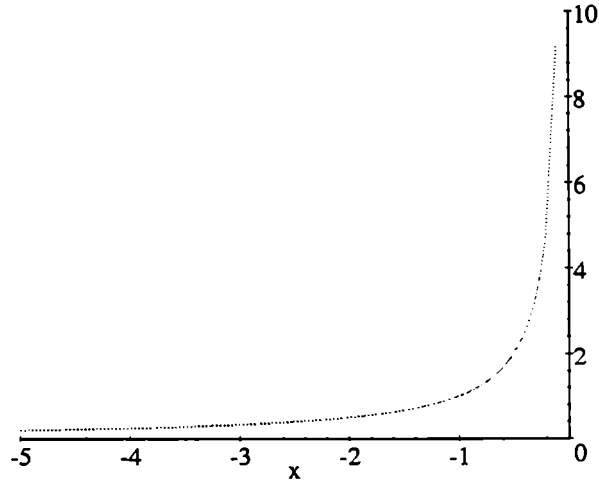


Figura 4-5: Gráfico de la función $\Psi(n - \hat{\alpha}_{ML}) - \Psi(-\hat{\alpha}_{ML})$, que depende del estimador de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}_{ML}$, para γ conocido y $n = 1$

$$F_{Z_A}(\hat{Q}_{3/4}; \hat{\alpha}_{IQR}) - F_{Z_A}(\hat{Q}_{1/4}; \hat{\alpha}_{IQR}) = \frac{1}{2}, y$$

$$F_{Z_A}(\hat{Q}_{3/4}; \hat{\alpha}_{123}) - F_{Z_A}(\hat{Q}_{1/2}; \hat{\alpha}_{123}) - F_{Z_A}(\hat{Q}_{1/4}; \hat{\alpha}_{123}) = 0,$$

donde F_{Z_A} es la función de distribución acumulada de $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$, dada en la ecuación (3.26) del Capítulo 3, Sección 3.3.4. Usando el hecho que la función hipergeométrica puede ser calculada fácilmente utilizando la función \mathcal{F} de Snedecor, como puede verse en el capítulo mencionado, el problema se reduce a resolver las siguientes ecuaciones, para cada uno de los estimadores, como se muestra en las siguientes ecuaciones

$$\Upsilon_{2n, -2\hat{\alpha}_{Med}}(-\hat{Q}_{1/2}^2 \hat{\alpha}_{Med} / \gamma) = \frac{1}{2},$$

$$\Upsilon_{2n, -2\hat{\alpha}_{IQR}}(-\hat{Q}_{3/4}^2 \hat{\alpha}_{IQR} / \gamma) - \Upsilon_{2n, -2\hat{\alpha}_{IQR}}(-\hat{Q}_{1/4}^2 \hat{\alpha}_{IQR} / \gamma) = \frac{1}{2}, y$$

$$\Upsilon_{2n, -2\hat{\alpha}_{123}}(-\hat{Q}_{3/4}^2 \hat{\alpha}_{123}/\gamma) - \Upsilon_{2n, -2\hat{\alpha}_{123}}(-\hat{Q}_{1/2}^2 \hat{\alpha}_{123}/\gamma) - \Upsilon_{2n, -2\hat{\alpha}_{123}}(-\hat{Q}_{1/4}^2 \hat{\alpha}_{123}/\gamma) = 0$$

donde $\Upsilon_{s,t}$ es la función de distribución acumulada de la distribución \mathcal{F} de Snedecor, con s y t grados de libertad.

4.3.5 Estimación conjunta de los parámetros α y γ por el método de los momentos.

Para estimar los parámetros α y γ en forma conjunta usaremos los momentos de orden r como se definieron en (4.17). Consideraremos dos casos: uno el que utiliza los momentos de orden 1 y 2 y el otro utiliza los momentos de orden 1 y 1/2. En ambos se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$, que son los valores estimados de los parámetros α y γ , respectivamente.

1. Denotaremos con $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})_{m_1 m_2}$ al estimador conjunto de los parámetros α y γ utilizando los momentos de orden 1 y 2. Sean m_1 y m_2 los estimadores del primer y segundo momento, respectivamente, es decir,

$$m_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i \text{ y } m_2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i^2$$

donde z_i , $0 \leq i \leq M$, es una realización de un vector aleatorio de dimensión M , cuyas componentes están distribuidas \mathcal{G}_A^0 . Luego, para los valores $r = 1, 2$ que serán substituídos en la ecuación (4.17) queda planteado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} m_1 = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha}-\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} & \text{si } \hat{\alpha} < -\frac{1}{2} \\ m_2 = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right) \frac{\Gamma(-\hat{\alpha}-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} & \text{si } \hat{\alpha} < -1 \end{cases}$$

y despejando $\hat{\gamma}$ de ambas ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} \hat{\gamma} = n \left(\frac{m_1 \Gamma(-\hat{\alpha}) \Gamma(n)}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \right)^2 \\ \hat{\gamma} = -(\hat{\alpha} + 1) m_2 \end{cases} \quad (4.27)$$

e igualando, nos queda:

$$-(\hat{\alpha} + 1)m_2 = n \left(\frac{m_1 \Gamma(-\hat{\alpha}) \Gamma(n)}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \right)^2$$

Por lo tanto, se tendrá una función que depende de $\hat{\alpha}$ y que está igualada a una función que depende del valor del parámetro n y de los estimadores de los momentos de orden 1 y 2, es decir que depende de las muestras, como se ve en la siguiente ecuación.

$$-(\hat{\alpha} + 1) \left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} \right)^2 = \left(\frac{n}{m_2} \right) \left(\frac{m_1 \Gamma(n)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \right)^2$$

Si llamamos $\hat{\alpha}_{m_1 m_2}$ al estimador del parámetro α por el método de los momentos de orden 1 y 2, entonces se trata de hallar una solución de la ecuación (4.28)

$$f(\hat{\alpha}_{m_1 m_2}) - \tau = 0 \quad (4.28)$$

con

$$f(\hat{\alpha}_{m_1 m_2}) = -(\hat{\alpha}_{m_1 m_2} + 1) \left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha}_{m_1 m_2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha}_{m_1 m_2})} \right)^2$$

y

$$\tau = \frac{m_1^2}{m_2} \frac{n \Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{2})} \quad (4.29)$$

La función $f(\hat{\alpha}_{m_1 m_2})$ es continua y decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$, además se tiene que $\lim_{\hat{\alpha} \rightarrow -1} (-\hat{\alpha} - 1) \left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} \right)^2 = 0$ y $\lim_{\hat{\alpha} \rightarrow -\infty} (-\hat{\alpha} - 1) \left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} \right)^2 = 1$, el gráfico de esta función se muestra la figura 4-6. Esto significa que en las situaciones donde la variable aleatoria τ tome valores mayores o iguales a 1, la ecuación (4.28) no tendrá solución. En la práctica esto es un problema muy importante que hay que tener muy en cuenta cuando se hacen los algoritmos para estimar estos parámetros en forma conjunta. Vemos entonces en la ecuación (4.29) que τ es una variable aleatoria que depende de las muestras y de n . El factor que depende de n , llamemos $s(n) = \frac{n \Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{2})}$, es una

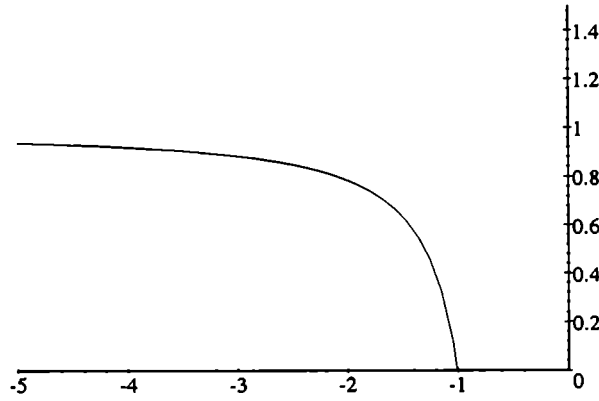


Figura 4-6: Variación de la función $f(\hat{\alpha})$ con respecto a los valores $\hat{\alpha}$

función decreciente y continua en el intervalo $(0, \infty)$ y cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = 1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow 0} s(n) = \infty,$$

en nuestro caso solamente consideramos los valores de $n \geq 1$, por lo tanto tendremos que este factor está acotado en el intervalo $[1, \infty)$, es decir

$$1 < |s(n)| \leq \frac{4}{\pi}, \text{ para } n \geq 1$$

En la figura 4-7 se puede ver la variación de la función s cuando varía n . De la ecuación (4.29) se puede entonces considerar que τ depende de las muestras multiplicada por una constante, que variará entre 1 y $\frac{4}{\pi}$ según sea el valor de n . Luego tenemos que $\frac{m_1^2}{m_2} < |\tau| < \frac{m_1^2}{m_2} \frac{4}{\pi}$. Entonces para que la ecuación (4.28) tenga solución las muestras deberán cumplir la condición $\frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2} < \frac{\pi}{4}$. Luego, cuando se pueda encontrar el valor del estimador de α , se substituye en la ecuación (4.27) y se halla el estimador de γ correspondiente. En la parte de aplicaciones trataremos el tema de estos valores que no se pueden estimar que llamaremos «prohibidos».

2. Denotaremos con $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})_{m_1 m_{1/2}}$ al estimador conjunto de los parámetros α y γ utilizando el método de los momentos de orden 1 y 1/2. Sean m_1 y $m_{1/2}$ los estimadores de los

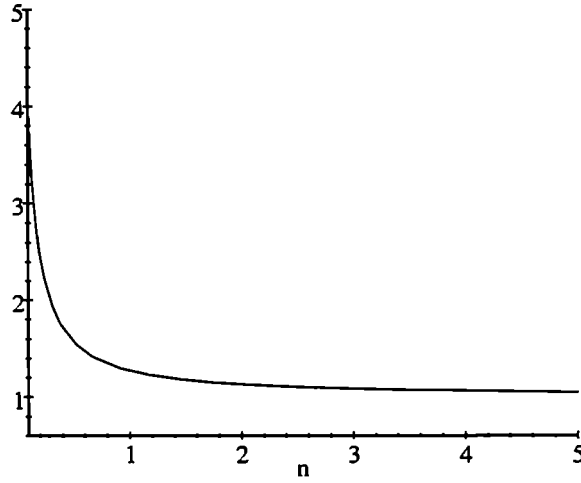


Figura 4-7: Variación de la función $\frac{n\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n+\frac{1}{2})}$

momentos de orden 1 y 1/2, respectivamente y están definidos como

$$m_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i \text{ y } m_{1/2} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i^{1/2}$$

donde z_i , $0 \leq i \leq M$, es una realización de un vector aleatorio de dimensión M , cuyas componentes están distribuidas \mathcal{G}_A^0 . Luego, para los valores $r = 1/2, 1$, utilizando la ecuación (4.17) queda planteado el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \text{ si } \hat{\alpha} < -\frac{1}{2} \\ m_{1/2} &= \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \text{ si } \hat{\alpha} < -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para este estimador procedemos en forma análoga al caso 1. Igualando, obtenemos

$$\left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \frac{1}{m_1} = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \frac{1}{m_{1/2}}$$

y despejando $\hat{\gamma}$

$$\hat{\gamma} = n \left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{m_1}{m_{1/2}} \right)^4 \quad (4.30)$$

substituyendo en la ecuación (4.17) para $r = 1/2$,

$$\begin{aligned} m_{1/2} &= \frac{m_1}{m_{1/2}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} = \\ &= \frac{m_1}{m_{1/2}} \frac{(\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4}))^2}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \end{aligned}$$

luego se tiene:

$$m_{1/2}^2 = m_1 \frac{(\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4}))^2}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}$$

Es decir, que se debe hallar los valores de $\hat{\alpha}$ tal que:

$$\frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})} = \frac{m_{1/2}^2}{m_1} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{4})}, \quad \hat{\alpha} < -1/2 \quad (4.31)$$

Llamemos $\hat{\alpha}_{m_1 m_{12}}$ al estimador de α por este método. Luego como ya vimos en el caso 1 se plantea la siguiente ecuación:

$$f(\hat{\alpha}_{m_1 m_{12}}) - \tau = 0 \quad (4.32)$$

con

$$f(\hat{\alpha}_{m_1 m_{12}}) = \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{m_{1/2}^2}{m_1} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{4})}$$

Donde $f(\hat{\alpha}_{m_1 m_{12}})$ es una función continua y decreciente en $(-\infty, 0)$ y $\lim_{\hat{\alpha} \rightarrow -\infty} \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})} = 1$ y $\lim_{\hat{\alpha} \rightarrow -1/2} \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})} = 0$, como se puede ver en la figura 4-8 donde se muestra la variación de la función $f(\hat{\alpha}_{m_1 m_{12}})$. Claramente esta función no toma valores mayores o

iguales a 1, este hecho nos indica que la ecuación (4.32) no tendrá solución cuando la variable aleatoria τ tome valores mayores o iguales a 1.

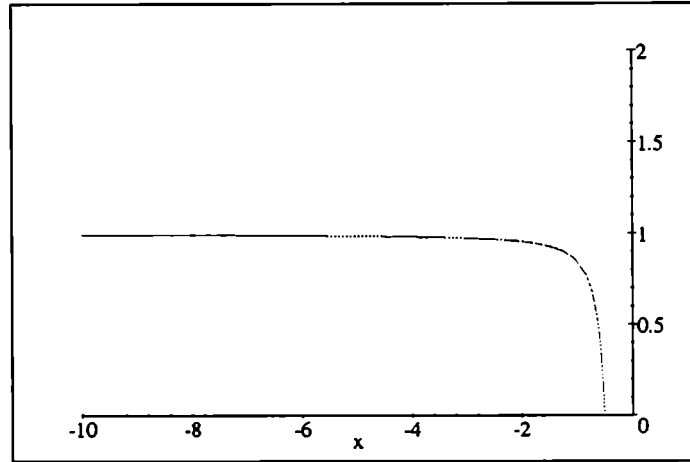


Figura 4-8: Gráfico de f

Y como en el caso 1, para que haya solución se debe cumplir la condición $\frac{m_1^2}{m_1} < \frac{(\sqrt{\pi})^3}{4\Gamma^2(\frac{3}{4})} \simeq 0.93$, puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma^2(n+\frac{1}{4})} = 1$ y $\lim_{n \rightarrow 0+} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma^2(n+\frac{1}{4})} = \infty$, como se puede ver en la figura (4-9)

Este caso será luego tratado en las aplicaciones.

4.3.6 Estimación conjunta de los parámetros (α, γ) usando transformación logarítmica

Para estimar los dos parámetros α y γ debemos considerar el primer y segundo momento de la variable aleatoria $W = \ln Z$, como se definieron en la sección 4.3.2. Consideremos la derivada segunda de la función generadora de momentos $\varphi_W(t)$ de la variable aleatoria W , dado que $E[W^2] = \frac{d^2\varphi_W(t)}{dt^2}|_{t=0}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_W(t)}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{t/2} \log\left(\frac{\gamma}{n}\right) \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} \left[\log\left(\frac{\gamma}{n}\right) \Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2) - \right. \\ &\quad \left. -\Gamma'(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2) + \Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma'(n + t/2) \right] + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{t/2} \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)} \end{aligned}$$

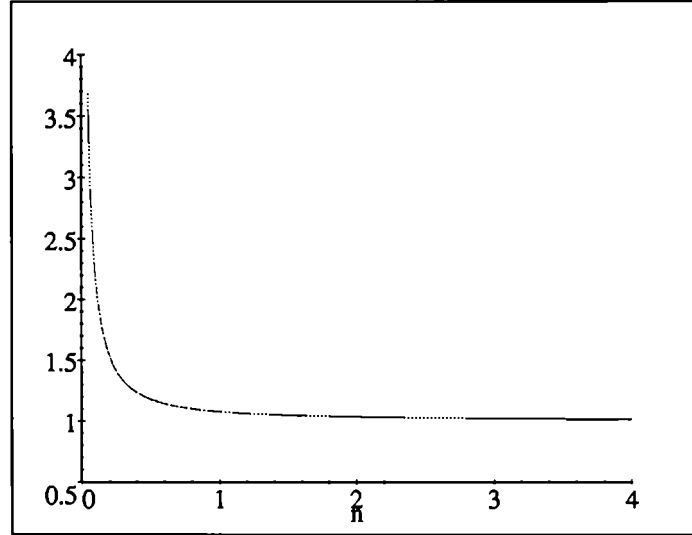


Figura 4-9: Gráfico de $\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n)}{\Gamma^2(n+1/4)}$

$$\left\{ \log\left(\frac{\gamma}{n}\right) - \left[\frac{1}{2}\Gamma'(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2) + \frac{1}{2}\Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma'(n + t/2) \right] \right.$$

$$- \left[-\frac{1}{2}\Gamma''(-\alpha - t/2)\Gamma(n + t/2) + \frac{1}{2}\Gamma'(-\alpha - t/2)\Gamma'(n + t/2) \right] +$$

$$\left. + \left[-\frac{1}{2}\Gamma'(-\alpha - t/2)\Gamma'(n + t/2) + \frac{1}{2}\Gamma(-\alpha - t/2)\Gamma''(n + t/2) \right] \right\}$$

Haciendo $t = 0$ obtenemos

$$\frac{d^2\varphi_W}{dt^2}(0) = \frac{1}{4} \left[\ln^2\left(\frac{\gamma}{n}\right) - 2\ln\left(\frac{\gamma}{n}\right)\Psi(-\alpha) + 2\ln\left(\frac{\gamma}{n}\right)\Psi(n) - \right.$$

$$\left. - 2\Psi(-\alpha)\Psi(n) + \frac{\Gamma''(-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} + \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)} \right]$$

Llamemos m_2^{\ln} al estimador de la $E[W^2]$

$$4m_2^{\ln} = \ln^2 \left(\frac{\hat{\gamma}}{n} \right) - 2 \ln \left(\frac{\hat{\gamma}}{n} \right) \Psi(-\hat{\alpha}) + 2 \ln \left(\frac{\hat{\gamma}}{n} \right) \Psi(n) -$$

$$-2\Psi(-\hat{\alpha})\Psi(n) + \frac{\Gamma''(-\hat{\alpha})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} + \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)} \quad (4.33)$$

De la ecuación 4.23 teníamos que :

$$\ln \frac{\hat{\gamma}}{n} = \Psi(-\hat{\alpha}) - \Psi(n) + 2m_1^{\ln}$$

si reemplazamos $\log \frac{\hat{\gamma}}{n}$ en la ecuación (4.33) obtenemos:

$$4m_2^{\ln} = -\Psi^2(-\hat{\alpha}) - \Psi^2(n) + 4 \left(m_1^{\ln} \right)^2 + \frac{\Gamma''(-\hat{\alpha})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} + \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)}$$

luego:

$$\frac{\Gamma''(-\hat{\alpha})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} - \Psi^2(-\hat{\alpha}) = 4(m_2^{\ln} - \left(m_1^{\ln} \right)^2) + \Psi^2(n) - \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)}$$

Y escribiendo esto último como $f(\hat{\alpha}) = \tau$, donde

$$f(\hat{\alpha}) = \frac{\Gamma''(-\hat{\alpha})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} - \Psi^2(-\hat{\alpha})$$

y

$$\tau = 4(m_2^{\ln} - \left(m_1^{\ln} \right)^2) + \Psi^2(n) - \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)}$$

el estimador de α será la solución de $f(\hat{\alpha})$. En la figura 4-10 se muestra la variación de esta función con el estimador del parámetro α . Se puede ver que la imagen de esta función es $\mathbb{R}_{>0}$ y por lo tanto para todo $\tau > 0$, $f(\hat{\alpha})$ tendrá solución cuando la variable aleatoria τ tome valores positivos.

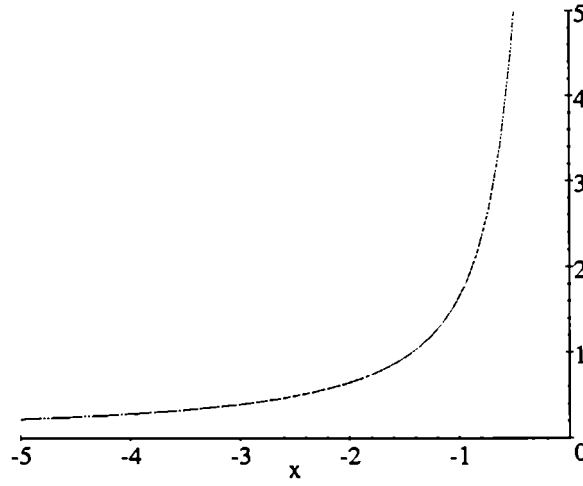


Figura 4-10: Variación de $f(\hat{\alpha})$ para el estimador conjunto de los parámetros α y γ por los momentos de orden 1 y 2 de $\ln Z$

4.3.7 Estimación conjunta de (α, γ) por el método de máxima verosimilitud

Para hallar los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros α y γ planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(z_i) = 0, \quad \sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln f(z_i) = 0 \quad (4.34)$$

Desarrollemos la ecuación (4.34) obtenemos:

$$\sum_{i=1}^k \left(-\frac{\alpha}{\gamma} - (n - \alpha) \frac{1}{(\gamma + z_i^2 n)} \right) = 0$$

despejando

$$\hat{\alpha} = \frac{n \hat{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\gamma + z_i^2 n)}}{\hat{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\gamma + z_i^2 n)} - k} \quad (4.35)$$

y reemplazando en la ecuación que se había calculado en (4.25)

$$\Psi(n - \hat{\alpha}) - \Psi(-\hat{\alpha}) = -\ln \hat{\gamma} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\hat{\gamma} + z_i^2 n)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi \left(\frac{n \hat{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\hat{\gamma} + z_i^2 n)}}{k - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\hat{\gamma} + z_i^2 n)}} \right) - \Psi \left(\frac{k - 2 \hat{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\hat{\gamma} + z_i^2 n)}}{k - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\hat{\gamma} + z_i^2 n)}} \right) = \\ = \ln \hat{\gamma} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(\hat{\gamma} + z_i^2 n) \end{aligned}$$

4.3.8 Estimación conjunta de (α, γ) utilizando técnicas mixtas

En esta sección utilizaremos los momentos de orden, el estimador de máxima verosimilitud y la transformación logarítmica para estimar el par (α, γ)

- m_1^{\ln} y $m_{1/2}$

Para estimar (α, γ) en forma conjunta usaremos el momento de orden 1 de $\ln Z$ y el momento de orden 1/2 de Z . Reemplazando la ecuación (4.23) en la ecuación (4.17) para $r = 1/2$, tenemos:

$$\ln \frac{\hat{\gamma}}{n} = 4 [\ln m_{1/2} + \ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(n + 1/4)] + 4 [\ln \Gamma(-\hat{\alpha}) - \ln \Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4)]$$

y despejando en función de $\hat{\alpha}$ obtenemos:

$$\Psi(-\hat{\alpha}) + 4 [\ln \Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4) - \ln \Gamma(-\hat{\alpha})] = 4 [\ln m_{1/2} + \log \Gamma(n) - \log \Gamma(n + 1/4)] + \Psi(n) - 2m_1^{\ln}$$

Luego, hay que hallar $\hat{\alpha}$ tal que

$$f(\hat{\alpha}) = \tau$$

donde:

$$f(\hat{\alpha}) = \Psi(-\hat{\alpha}) - 4(\ln \Gamma(-\hat{\alpha}) - \ln \Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4))$$

y

$$\tau = 4(\ln m_{12} + \ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(n + 1/4)) + \Psi(n) - 2m_1^{\ln} \quad (4.36)$$

En la figura 4-11 se puede ver el comportamiento de $f(\hat{\alpha})$ con respecto a $\hat{\alpha}$. Esta función es continua y creciente en el intervalo $(-\infty, -1/4)$, con lo que se deduce que cuando la variable aleatoria τ tome valores positivos $f(\hat{\alpha}) = \tau$ tendrá siempre solución. En la ecuación (4.36) llamemos $a = -(-4 \ln \Gamma(n) + 4 \ln \Gamma(n + 1/4) - \Psi(n))$, entonces tenemos que $\tau = 4 \ln m_{12} - 2m_1^{\ln} - a$. La condición $\tau > 0$ equivale a

$$\ln m_{12}^2 > m_1^{\ln} + \frac{a}{2} \quad (4.37)$$

que se puede escribir como

$$m_{12}^2 > e^{m_1^{\ln}} e^{\frac{a}{2}}$$

donde $m_{12}^2 = \left(\frac{1}{k} \sum_i^k z_i^{1/2}\right)^2$ y $e^{m_1^{\ln}} = e^{\frac{1}{k} \sum_i^k \ln z_i} = \left(\prod_i^k x_i\right)^{\frac{1}{k}}$ entonces la condición que deben cumplir las muestras es

$$\frac{\left(\frac{1}{k} \sum_i^k x_i^{1/2}\right)^2}{\left(\prod_i^k x_i\right)^{\frac{1}{k}}} > e^{\frac{a}{2}}$$

El valor $e^{\frac{a}{2}}$ solamente depende del número de looks n , un valor aproximado será, para $n = 1$, $e^{\frac{a}{2}} \simeq e^{0.1} \simeq 1.1$ y para $n = 10$, $e^{\frac{a}{2}} \simeq e^{0.02} = 1.02$. En la figura 4-12 se muestra la curva que separa dos semiplanos, los puntos que están por debajo de la curva son los que cumplen con la condición (4.37).

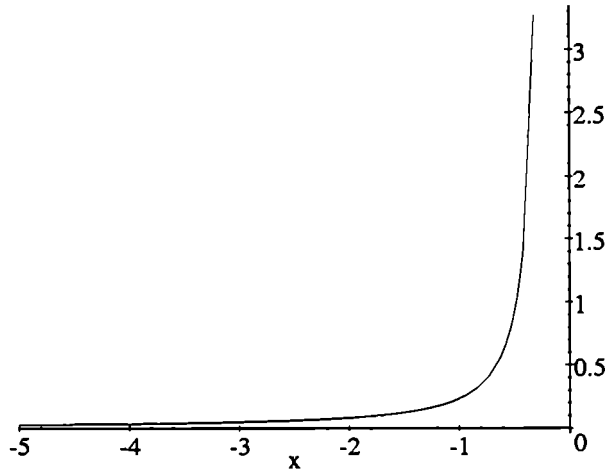


Figura 4-11: Comportamiento de la función $f(\hat{\alpha})$ para el estimador por momentos de orden 1/2 de Z y el estimador de orden 1 de $\ln Z$

- m_{MV} y $m_{1/2}$

Utilizaremos el estimador por el método de máxima verosimilitud y el método del momento de orden 1/2, dado que son los dos estimadores que mejor se comportaron, esto se verá cuando en el capítulo donde trataremos simulación. De la ecuación (4.17) para $r = 1/2$ y de la ecuación (4.25), como se hizo para los casos anteriores, se plantea la ecuación de la forma $f(\hat{\alpha}) = \tau$, pero en este caso f también depende del parámetro n . Ya que consideramos que n es conocido (pues es el número de looks), se tiene para un n fijo las siguientes ecuaciones con dos incógnitas $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$:

$$\ln \hat{\gamma} - 4 \ln m_{12} = \ln n + 4 \ln \Gamma(n) - 4 \ln \Gamma(n + \frac{1}{4}) + 4 \ln \Gamma(-\hat{\alpha}) - 4 \ln \Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})$$

$$\Psi(n - \hat{\alpha}) - \Psi(-\hat{\alpha}) = -\ln \hat{\gamma} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\hat{\gamma} + z_i^2 n)$$

Despejando y sustituyendo,

$$\Psi(n - \hat{\alpha}) - \Psi(-\hat{\alpha}) + 4 \left(\ln \Gamma(-\hat{\alpha}) - \ln \Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4}) \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\hat{\gamma} + z_i^2 n) - 4 \ln m_{12} - 4 \ln \frac{\Gamma(n)}{n \Gamma(n + \frac{1}{4})}$$

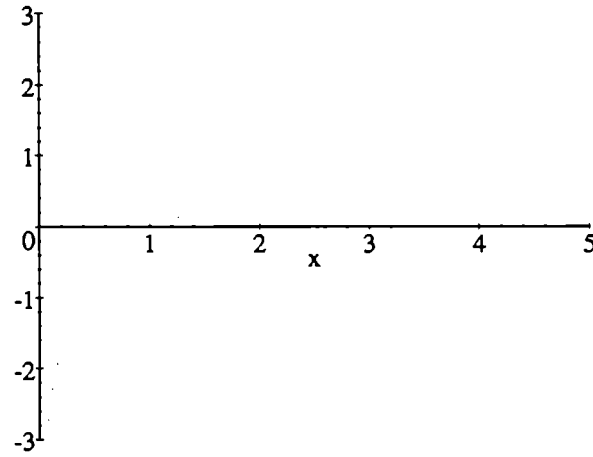


Figura 4-12: Los puntos del plano que están por debajo de la curva, cumplen con la relación $\ln m_{12}^2 - \frac{a}{2} > m_1^{\ln}$

$$f(\hat{\alpha}) = \Psi(n - \hat{\alpha}) - \Psi(-\hat{\alpha}) + 4 \left(\ln \Gamma(-\hat{\alpha}) - \ln \Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4}) \right)$$

y

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\hat{\gamma} + z_i^2 n) - 4 \ln m_{12} - 4 \ln \frac{\Gamma(n)}{n \Gamma(n + \frac{1}{4})}$$

Se tiene que $\lim_{\hat{\alpha} \rightarrow -\infty} \Psi(n - \hat{\alpha}) - \Psi(-\hat{\alpha}) + 4 \left(\ln \Gamma(-\hat{\alpha}) - \ln \Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4}) \right) = \infty$, como se puede observar en la figura 4-13, por lo tanto la ecuación $f(\hat{\alpha}) = \tau$ tendría solución cuando la variable aleatoria toma valores reales positivos.

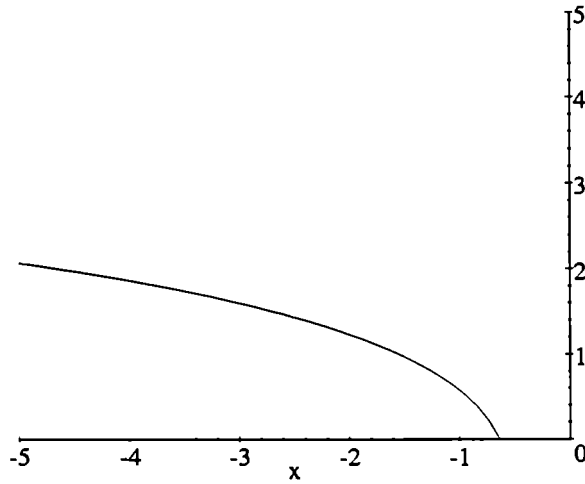


Figura 4-13: Gráfico de $f(\hat{\alpha})$ basada en el estimador del momento de orden 1/2 y el estimador de máxima verosimilitud, para estimar en forma conjunta los parámetros α y γ

4.3.9 Algunas consideraciones sobre el parámetro de escala γ

Consideremos el estimador $m_1 m_{12}$ de (α, γ) basado en los momentos de orden 1 y 1/2. Teniendo en cuenta la ecuación 4.17 para $r = 1$ y $r = 1/2$, despejamos el parámetro γ , que quedará en función del parámetro α y de una función que depende de los momentos de orden 1 y de orden 1/2 y del número de looks n . Llamaremos a esta función $T = T(m_1, m_{12}, n)$, como se muestra en las ecuaciones (4.38) y (4.39), válidas para $-\alpha < -1/2$

$$\frac{m_1}{m_{12}} = \frac{\hat{\gamma}^{1/4} \Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2) \Gamma(n + 1/2)}{n^{1/4} \Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4) \Gamma(n + 1/4)}$$

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{m_1}{m_{12}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4) \Gamma(n + 1/4)}{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2) \Gamma(n + 1/2)} \right)^4 n$$

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4)}{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2)} \right)^4 . T \quad (4.38)$$

donde

$$T = \left(\frac{m_1}{m_{12}} \right)^4 \left(\frac{\Gamma(n+1/4)}{\Gamma(n+1/2)} \right)^4 n \quad (4.39)$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} k^{b-a} = 1$$

(ver [AS64]) entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma(n+1/4)}{\Gamma(n+1/2)} \right)^4 n = 1.$$

En particular para $n = 1$ se tiene $c = \frac{\Gamma^4(5/4)}{\Gamma^4(3/2)} \simeq 1.0942$, luego T será función de los momentos m_1 y m_{12} , es decir que se puede considerar $T = \left(\frac{m_1}{m_{12}} \right)^4 c$ (nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+1/4)}{\Gamma(n+1/2)} \rightarrow 0$)

Veamos el comportamiento de $\left(\frac{\Gamma(-\hat{\alpha}-1/4)}{\Gamma(-\hat{\alpha}-1/2)} \right)^4$, Llamemos $-\alpha - 1/2 = x$ luego usando la fór-

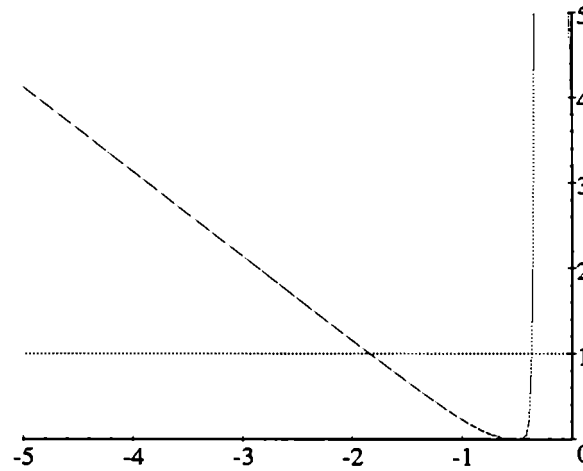


Figura 4-14: Variación del parámetro $\hat{\gamma}$ en función del parámetro $\hat{\alpha}$.

mula de Stirling $\Gamma(x) \sim e^{-x} x^{x-1/2} \sqrt{2\pi}$ para grandes valores de x , tenemos la siguiente aproxi-

mación:

$$\frac{\Gamma^4(x+1/4)}{\Gamma^4(x)} \simeq x$$

Luego un estimador del parámetro γ será

$$\hat{\gamma} = (-\hat{\alpha} - 1/2) \left(\frac{m_1}{m_{12}} \right)^4 \quad (4.40)$$

Qué sucede cuando $\hat{\alpha}$ está muy cerca de $-1/2$, es decir cuando $x \rightarrow 0^+$?. Usando los resultados que se muestran en la ecuación (4.41) (ver Apéndice H), se demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\Gamma(x+1/4)}{\Gamma(x)} \right)^4 = 0$, y que vale la siguiente desigualdad

$$\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)} < \left(k + \frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda-1}, \text{ para } 0 < \lambda < 1 \text{ ó } \lambda > 2, k \in R_{\geq 0} \quad (4.41)$$

luego como $\Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$ se puede expresar la desigualdad (4.41) de la siguiente manera

$$\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k)} < k \left(k + \frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda-1}$$

Reemplazando $k = x$ y $\lambda = 1/4$, obtenemos

$$\frac{\Gamma(x+1/4)}{\Gamma(x)} < x \left(x + \frac{1}{8} \right)^{-3/4}$$

Entonces para $x \rightarrow 0$ se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(x+1/4)}{\Gamma(x)} = 0$, que es lo que se quería demostrar.

Se tiene el siguiente resultado :

El estimador de α y γ es la solución del siguiente sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \hat{\gamma} &= (-\hat{\alpha} - 1/2) \left(\frac{m_1}{m_{12}} \right)^4 \frac{\pi^2}{4\Gamma^4(\frac{3}{4})} \\ (-\hat{\alpha} - 1/2)^{1/2} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha}-1/2)}{\Gamma(-\hat{\alpha})} &= (m_1 m_{12})^{1/2} \frac{4\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\pi^{3/2}} \end{cases}$$

$$-\hat{\alpha} = \frac{m_{12}^4}{m_1^4} \frac{4\Gamma^4(\frac{3}{4})}{\pi^2} \hat{\gamma} + \frac{1}{2}$$

Este sistema tiene solución cuando $m_1 m_{12} > 1$, ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\hat{\alpha} - 1/2)^{-1/2} \frac{\Gamma(\hat{\alpha})}{\Gamma(-\hat{\alpha}-1/2)} = 1$, como se puede observar en la figura 4-15.

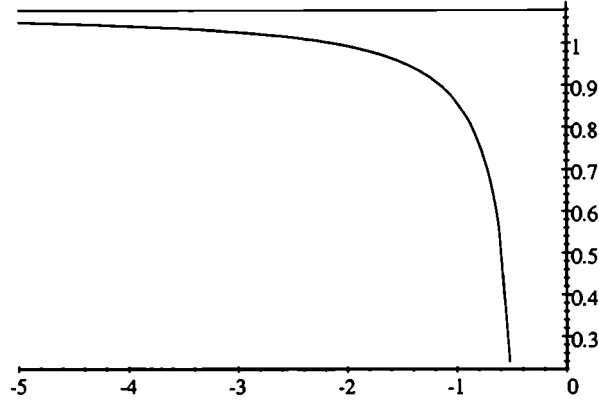


Figura 4-15: Variación de $\frac{(-\alpha-1/2)^{-1/2}}{\Gamma(-\alpha-1/2)} \Gamma(-\alpha)$ en función de α . La imagen de esta función es $\{y \in R/y \leq 1\}$

Este capítulo estuvo consagrado a los estimadores de los parámetros de las distribuciones \mathcal{G}_A^0 y \mathcal{K}_A . Se presentaron diferentes técnicas de estimación, algunas de ellas serán tratadas en el Capítulo 5, con más detalle. Considerando en todos los casos al parámetro n (número equivalente de looks) conocido, fueron estudiados e implementados los estimadores del parámetro de rugosidad para ambas distribuciones. Se trabajó bajo dos hipótesis: primero, suponiendo media unitaria, se consideró el parámetro de escala en función de la rugosidad y de n y segundo, se trató la estimación en forma conjunta de los parámetros de rugosidad y de escala.

Capítulo 5

Evaluación de estimadores

En la actualidad se considera a la estadística computacional como un área muy importante, que abarca casi todos los aspectos de la teoría y de la práctica estadística y al mismo tiempo todos los aspectos que involucran a las ciencias de la computación. Provee herramientas complementarias para la investigación en otras áreas de la ciencia. Cuando los problemas que se encaran matemáticamente son muy difíciles de resolver, o quizás imposibles las herramientas computacionales ayudan a contestar las preguntas teóricas acerca de procedimientos estadísticos.

Una de las herramientas de la estadística teórica es la simulación o experiencia de Monte Carlo. Por ejemplo, si fuera posible especificar una estructura matemática que tenga ciertas propiedades y si fuera posible generar muestras de la población con esta estructura, entonces se generaría un tamaño grande de estas muestras donde se observaría en cada una dicha estructura. Luego, promediando todas las muestras, se tendría en cuenta el comportamiento de esta característica particular. Utilizar el método de Monte Carlo para poder responder cuestionamientos teóricos requiere habilidad para definir la estructura apropiada del problema, para generar (es decir, simular) muestras con estas estructuras y para diseñar experimentos que respondan eficientemente los requerimientos teóricos de interés. El método de Monte Carlo es utilizado en problemas teóricos para determinar cantidades através de simulaciones que serían muy dificultosas o a veces imposibles de evaluar analíticamente. En un típico estudio de simulación miles de realizaciones son generadas suponiendo que provienen de una distribución teórica de interés, es decir se simulan realizaciones de variables aleatorias que están distribuidas según una ley dada. Luego se calculan los estadísticos de interés de los datos simulados y se concluye

sobre su comportamiento mirando qué sucede con las miles de muestras repetidas. Cantidades como la media o el error cuadrático medio, percentiles de las distribuciones entre otras pueden ser aproximadas através de la simulación.

Este capítulo tratará de la generación de muestras aleatorias de la distribución \mathcal{G}_A^0 , la estimación de los parámetros de esta distribución y el comportamiento de los estimadores mediante una experiencia de Monte Carlo

5.1 Generación de variables aleatorias

La generación de variables aleatorias es de suma importancia cuando se trabaja en simulación estocástica. En esta sección se presentarán los generadores para muestras aleatorias de distribución \mathcal{G}_A^0 y por lo tanto los generadores de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$.

Además de la necesidad intrínseca de disponer de un generador de observaciones provenientes de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con distribución $\Gamma(\alpha, \beta)$, para los fines de esta tesis se puede apuntar la siguiente razón: IDL a pesar de ser una plataforma avanzada para desarrollos computacionales sofisticados ofrece una función de generación de distribuciones Gamma que impone la restricción al parámetro α de ser entero. Para disponer de toda la generalidad necesaria para este y otros trabajos que utilizan simulación estocástica, (como por ejemplo, [MJBFB98], [VF98],) se vió la necesidad de implementar un generador que atienda estas expectativas. La literatura abunda en generadores de Gamma ya que, parafraseando a Frery y Bustos en [BF92b] este tal vez sea el tema más estudiado de simulación estocástica. Siendo el objetivo implementar un generador de estas características en IDL se eligió, dentro del elenco de funciones disponibles, aquellas que mejor se adaptasen a la filosofía matricial de implementación y procesamiento de este lenguaje. Es con este criterio que se eligió el algoritmo *XGGE*.

Sea F una función de distribución definida sobre \mathbb{R} y (Z_1, \dots, Z_k) variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas (i.i.d) con distribución F , se quiere generar una realización (z_1, \dots, z_k) de (Z_1, \dots, Z_k) . Supongamos que hemos generado una realización (u_1, \dots, u_k) de (U_1, \dots, U_k) i.i.d con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$ que denotaremos $\mathcal{U}(0, 1)$, entonces mediante una transformación pasaremos de (u_1, \dots, u_k) a (z_1, \dots, z_k) . Diferentes méto-

dos se utilizan para generación de variables aleatorias con distribución F a partir de variables aleatorias uniformes, se pueden ver en detalle en [BF92b].

Los algoritmos que veremos dependen de las propiedades enunciadas en las proposiciones que se enuncian a continuación y cuyas demostraciones se encuentran en el apéndice ??.

Proposición 40 *Son verdaderas las siguientes afirmaciones*

1. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes tales que $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, 1)$ y $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, 1)$, entonces las variables aleatorias $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ y $Y_2 = X_1 + X_2$ son independientes y cumplen que $Y_1 \sim \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$ y $Y_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, 1)$. (\mathcal{B} es la distribución *Beta*)
2. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ y $Y \sim \mathcal{B}(\beta, \beta - \alpha)$, con $0 < \alpha < \beta$, entonces XY y $X(1 - Y)$ son variables aleatorias con distribución $\Gamma(\beta, 1)$ y $\Gamma(\beta - \alpha, 1)$ respectivamente.
3. Si $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ entonces $kX \sim \Gamma(\alpha, k\beta)$.

Para generar muestras de variables aleatorias con distribución Gamma, veamos primero un algoritmo simple para generar realizaciones de variables aleatorias independientes con distribución $\Gamma(\alpha, \beta)$. Supongamos que (u_1, \dots, u_k) es una realización de (U_1, \dots, U_k) valid con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$.

Proposición 41 *El producto de k variables aleatorias iid con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$ tienen distribución $\Gamma(k, 1)$*

Algoritmo 42 *Para $\alpha = k \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $\beta = 1$ devolver $x = -\ln\left(\prod_{i=1}^k u_i\right)$*

Vamos a considerar los casos cuando $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ y $\alpha > 1$. El siguiente algoritmo está basado en el método de rechazo [BF92b].

Algoritmo 43 *XG, para $\alpha > 1$ y $\beta = 1$*

entrada: $\alpha > 1$

1. $b = \alpha - 1$, $c = 3\alpha - \frac{3}{4}$ y $C = 0$
2. mientras $C = 0$ hacer
 - a) generar u_1 y u_2 muestras independientes de $\mathcal{U} \sim U(0, 1)$

b) $w = u_1 (1 - u_1)$, $y = \sqrt{\frac{x}{w}} (u_1 - 1/2)$, $x = b + y$

c) Si $x \geq 0$ entonces

i. $z = 64w^3u_2^2$

ii. $C = \mathbb{I}_{(,1]}(z^{-1}(1 - 2y^2/x))$

iii. Si $C = 0$ entonces $C = \mathbb{I}_{(,1]}(2(b \ln \frac{x}{b} - y) \ln z)$

3. retornar: x

Proposición 44 Si $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$ y $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ entonces son válidas las siguientes afirmaciones:

a. $YU^{1/\alpha} \sim \Gamma(\alpha, 1)$ cuando $\alpha < 1$,

b. si $\alpha = 1$ entonces el producto tiene distribución exponencial.

Algoritmo 45 Generación de Gammas con $\alpha < 1$ y $\beta = 1$

entrada: $\alpha \leq 1$

i. si $\alpha < 1$, entonces

1. generar una muestra y de $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$

2. generar una muestra u de $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$

3. considerar $z = u^{1/\alpha}$

4. retornar $x = yz$

ii. si $\alpha = 1$

retornar $x = -\ln u$

Algoritmo 46 Generación de Gammas con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

entrada: $\alpha = 1$

1. generar una muestra y de $Y \sim \Gamma(2, 1)$

2. generar una muestra u de $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$

3. retornar $x = yu$

Las siguientes proposiciones han sido probadas en el capítulo 3. Serán utilizadas, ahora que ya tenemos un generador de observaciones que provienen de la distribución Gamma, para hallar un generador de la distribución \mathcal{G}_A^0 y también de la distribución \mathcal{K}_A .

Proposición 47 *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. Si $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ entonces $X\sqrt{\lambda} \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$
2. Si $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ entonces $X^{-1} \sim \Gamma^{-1/2}(-\alpha, \lambda)$
3. Si $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ entonces $X/\sqrt{\gamma} \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, 1)$

Algoritmo 48 *Generador de observaciones que provienen de la distribución $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ entrada: α, λ y n .*

1. generar una muestra w de $\Gamma(\alpha, 1)$
2. considerar \sqrt{w} , lo que implica que será una muestra de $\Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$
3. considerar $x = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\lambda}}$, esta será una muestra de $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$
4. generar una muestra v de $\Gamma(n, 1)$
5. considerar \sqrt{v} que será una muestra de $\Gamma^{1/2}(n, 1)$
6. considerar $y = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{n}}$, será una muestra de $\Gamma^{1/2}(n, n)$
7. retornar $z_K = xy$, que será una muestra de la distribución $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$

Algoritmo 49 *Generador de observaciones que provienen de la distribución $\mathcal{G}_A(\alpha, \lambda, n)$ entrada: α, λ y n*

1. generar una muestra w de $\Gamma(\alpha, 1)$
2. considerar \sqrt{w} , lo que implica que será una muestra de $\Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$
3. considerar $x = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{w}}$, esta será una muestra de $\Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$
4. generar una muestra v de $\Gamma(n, 1)$
5. considerar \sqrt{v} que será una muestra de $\Gamma^{1/2}(n, 1)$
6. cosiderar $y = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{n}}$, será una muestra de $\Gamma^{1/2}(n, n)$
7. retornar $z_G = xy$ que será una muestra de la distribución $\mathcal{G}_A(\alpha, \lambda, n)$

5.2 Comportamiento de los estimadores mediante experiencia de Monte Carlo

En esta sección serán utilizados diferentes estimadores para el parámetro de rugosidad de la distribución \mathcal{G}_A^0 . Se considerará el parámetro de escala γ como función de α y n de tal manera

que la media sea unitaria. Se realizará una experiencia de Monte Carlo para comparar el comportamiento entre estimadores del parámetro α , para distintos números de looks n . Para llevar a cabo esta comparación se utilizarán dos criterios: el criterio del error cuadrático medio, que lo denotaremos mse y el criterio de la distancia al verdadero valor, que denotaremos dvv . Mediante este estudio se podrá concluir que el estimador de máxima verosimilitud es el que mejor comportamiento tuvo entre todos los estimadores que se consideraron según los dos criterios antes mencionados.

La experiencia de Monte Carlo se realizó para establecer una comparación numérica entre los estimadores que se vieron en el capítulo 4. En particular para los estimadores del parámetro α donde el parámetro γ se calculó a partir de α y de n tal que la media sea unitaria. Este estudio consistió de 100000 replicaciones, para cada situación con diferentes tamaños de muestra y de valores de parámetros se estimó el parámetro α . Se utilizaron los estimadores $\hat{\alpha}_{1/2}$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_1^{\ln}$, $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\alpha}_{Med}$, $\hat{\alpha}_{IQR}$ y $\hat{\alpha}_{123}$ pero los últimos dos tuvieron un comportamiento pobre con respecto a los otros cinco, y por este motivo presentamos sólo los resultados de las comparaciones entre los primeros cinco estimadores.

La estructura de la experiencia de Monte Carlo fue la siguiente:

- Repetir para cada replicación $1 \leq i \leq 100000$
 - Para cada número de looks $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ y para cada parámetro de homogeneidad $\alpha \in \{-1.5, -2, -5, -10\}$ para cada tamaño de muestra $m \in \{9, 25, 49, 81\}$ hacer
 - * generar m muestras independientes de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma_{\alpha, \lambda}, n)$,
 - * calcular los cinco estimadores $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_{1/2}$, $\hat{\alpha}_1^{\ln}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ y $\hat{\alpha}_{Med}$ usando para cada uno estas m muestras,
- calcular la media, desviación estándar y el error cuadrático medio para cada estimador.

Los resultados son presentados en forma de tabla, de la siguiente manera: para cada terna (n, α, m) se comparan numéricamente los cinco estimadores por sus medias muestrales $(\bar{\alpha}_\bullet)$, desviaciones estándar muestrales (s_\bullet) y los errores cuadráticos medios muestrales $(mse_\bullet = (\bar{\alpha}_\bullet - \alpha)^2 + s_\bullet^2)$. Cada tabla presenta los resultados para un cierto valor de n .

El número de replicaciones (100000) fue elegido para poder establecer cuál es el mejor estimador para la peor situación, digamos que es el caso $(n, \alpha, m) = (1, -1.5, 9)$. Dado que el número de replicaciones es muy grande y por la ley fuerte de los grandes números es de esperar que la varianza en la experiencia de Monte Carlo sea muy pequeña, de hecho es del orden de $10^{-5} s_0^2$ para cada estimador considerado. Quedaría todavía la duda sobre la estabilidad del procedimiento de simulación, debido, por ejemplo, a las inestabilidades en las rutinas de simulación. Para disipar estas dudas, la experiencia fue repetida para el peor caso, es decir para los valores $(n, \alpha, m) = (1, -1.5, 9)$, con diferentes semillas y también fue obtenido el error cuadrático medio, mse .

Se utilizaron dos criterios para comparar las tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4, el error cuadrático medio, mse , y la distancia al verdadero valor. Como primer paso se utilizó la distancia más cercana al verdadero valor para elegir el mejor entre los estimadores, en caso de empate se consideró un segundo criterio que elige como mejor al que posee menor mse . Usaremos la notación (n, α, m) para referirnos a cada caso en particular. En las tablas podemos notar que la mayoría de las veces todos los estimadores estimaron por debajo del verdadero valor de α dando esto un sesgo positivo. Las únicas excepciones de esta observación son el estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ (en $(4, -1.5, 81)$, $(8, -1.5, 81)$, $(8, -2, 81)$ y $(8, -10, 81)$) y el estimador $\hat{\alpha}_1^{ln}$ $((1, -10, 9)$, $(2, -10, 9)$ y $(1, -10, 25))$. Podemos notar que el sesgo del primero es bastante más pequeño que la del segundo. El estimador de máxima verosimilitud estima por debajo del valor verdadero en situaciones donde el tamaño de la muestra es pequeña y la rugosidad es grande, mientras que el estimador basado en la transformación logarítmica estima por debajo del valor verdadero cuando estamos en presencia de gran homogeneidad y el número de looks es pequeño.

Para 51 casos de 64, el estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ se comportó mejor que los otros estimadores tomando como criterio el mse . Solamente fue superado en 6 situaciones, las que se enuncian a continuación: $(-1, -2, 9)$, $(2, -5, 9)$ y $(2, -5, 25)$ para las cuales el estimador $\hat{\alpha}_1$ fue el mejor y $(1, -1.5, 25)$, $(2, -2, 9)$ y $(4, -5, 9)$ donde el estimador $\hat{\alpha}_{1/2}$ tuvo el mejor comportamiento.

Se puede ver en las siguientes situaciones que el comportamiento del estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ no es peor que el del estimador $\hat{\alpha}_{1/2}$: $(2, -1.5, 49)$, $(4, -1.5, 81)$, $(4, -5, 25)$, $(8, -1.5, 81)$, $(8, -2, 81)$ y $(8, -10, 81)$ y que tampoco es peor que el del estimador $\hat{\alpha}_1^{ln}$ en las siguientes situaciones: $(4, -1.5, 9)$, $(4, -1.5, 81)$, $(8, -1.5, 81)$ and $(8, -2, 81)$. Por lo tanto, solamente en 7 situaciones

el comportamiento del estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ no es peor con respecto a los otros estimadores.

Esto significa que el estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ fue mejor o igual que los otros estimadores de acuerdo al criterio mse en 58 situaciones sobre 64.

Usando el criterio de distancia más cercana al verdadero valor, sobre 64 casos, el estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ se comportó como el mejor en 38 casos, solamente en 7 situaciones otros estimadores lo igualaron. Los 19 casos restantes, corresponden a las siguientes situaciones: $(1, -10, 81)$ donde el estimador $\hat{\alpha}_1$ fue el mejor, $(1, -1.5, 25)$, $(1, -2, 9)$, $(1, -5, 25)$, $(1, -5, 49)$, $(2, -10, 9)$ y $(2, -10, 49)$ donde $\hat{\alpha}_{1/2}$ tuvo el mejor comportamiento y $(1, -5, 9)$, $(1, -10, 25)$, $(1, -10, 49)$, $(2, -2, 9)$, $(2, -5, 9)$, $(2, -5, 25)$, $(2, -10, 25)$, $(4, -5, 9)$, $(4, -10, 9)$, $(4, -10, 25)$, $(8, -5, 9)$ y $(8, -10, 9)$ donde $\hat{\alpha}_1^{ln}$ fue el mejor.

Resumiendo

- $\hat{\alpha}_1$: Hay 3 situaciones para las cuales este es el mejor estimador con respecto al criterio mse , y sólo un caso con respecto al criterio de la distancia más cercana al verdadero valor.
- $\hat{\alpha}_{1/2}$: Hay 3 situaciones para las cuales este es el mejor estimador y 6 situaciones donde es igual al estimador $\hat{\alpha}_{ML}$, usando como criterio el mse . En 6 este estimador el mejor y en 6 situaciones donde fue igual al estimador $\hat{\alpha}_{ML}$, tomando como criterio el valor más cercano al verdadero valor.
- $\hat{\alpha}_1^{ln}$: No hay ninguna situación, con respecto al criterio de mse , donde este sea el mejor estimador, pero hay 4 situaciones donde es igual al estimador $\hat{\alpha}_{ML}$. Con respecto al criterio de valor más cercano al valor verdadero, en 12 situaciones se comportó como el mejor estimador y en 4 fue igual que $\hat{\alpha}_{ML}$.
- $\hat{\alpha}_{Q_2}$: Este estimador tuvo una performance bastante pobre con respecto al criterio de mse y, aún cuando su valor medio se encuentra cerca del verdadero valor del parámetro, su desviación estandar es muy alta.

La tabla 5.5 muestra esta descripción, donde "g" significa ganar, "e" empatar y se usaron los criterios: mse (error cuadrático medio) y dvu (distancia al valor verdadero). Los resultados

fueron organizados por el número de looks.

Conclusiones:

- en la mayoría de las situaciones consideradas el estimador $\hat{\alpha}_{ML}$ fue el mejor de todos los estimadores con respecto a los dos criterios mse y dvv .
- el estimador $\hat{\alpha}_{1/2}$ fue mejor que el estimador $\hat{\alpha}_1$ para todos los looks y para todos los criterios.
- la distancia al verdadero valor, dvv , en el caso del estimador $\hat{\alpha}_1^{ln}$ fue menor que para el caso del estimador $\hat{\alpha}_1$
- para el estimador $\hat{\alpha}_1^{ln}$ el valor dvv fue menor que el calculado para el estimador $\hat{\alpha}_1$ para todos los looks y que el calculado para el estimador $\hat{\alpha}_{1/2}$ para 2, 4 y 8 looks. Con respecto al criterio mse , el estimador $\hat{\alpha}_1^{ln}$ tuvo un comportamiento peor que el estimador $\hat{\alpha}_1$ y que $\hat{\alpha}_{1/2}$ para todos los looks.

Considerando que el esfuerzo computacional requerido para calcular $\hat{\alpha}_{ML}$ es comparable con los otros estimadores, y considerando su muy buen desempeño, se puede concluir que es la mejor elección aún para muestras de tamaño pequeño.

n = 1											
α	m	$\hat{\alpha}_1$		$\hat{\alpha}_{1/2}$		$\hat{\alpha}_1^{ln}$		$\hat{\alpha}_{ML}$		$\hat{\alpha}_{Q_2}$	
		$\hat{\alpha}_1(s_1)$	mse_1	$\hat{\alpha}_{1/2}(s_{1/2})$	$mse_{1/2}$	$\hat{\alpha}_1^{ln}(s_1^{ln})$	mse_1^{ln}	$\hat{\alpha}_{ML}(s_{ML})$	mse_{ML}	$\hat{\alpha}_{Q_2}(s_{Q_2})$	mse_{Q_2}
-1.5	9	-1.72(0.79)	0.66	-1.67(0.65)	0.46	-1.67(0.75)	0.59	-1.67(0.64)	0.44	-1.76(1.06)	1.1
	25	-1.58(0.33)	0.12	-1.56(0.33)	0.11	-1.56(0.38)	0.15	-1.75(0.33)	0.11	-1.58(0.48)	0.2
	49	-1.54(0.23)	0.05	-1.53(0.23)	0.05	-1.53(0.26)	0.07	-1.52(0.22)	0.05	-1.54(0.33)	0.1
	81	-1.53(0.18)	0.03	-1.53(0.17)	0.03	-1.52(0.20)	0.04	-1.50(0.17)	0.03	-1.53(0.25)	0.0
-2	9	-2.26(0.83)	0.77	-2.22(0.87)	0.81	-2.22(1.02)	1.08	-2.23(0.85)	0.78	-2.34(1.39)	2.0
	25	-2.10(0.43)	0.20	-2.08(0.45)	0.21	-2.08(0.51)	0.27	-2.07(0.44)	0.20	-2.11(0.65)	0.4
	49	-2.05(0.30)	0.09	-2.04(0.31)	0.10	-2.04(0.35)	0.12	-2.03(0.30)	0.09	-2.06(0.44)	0.1
	81	-2.03(0.23)	0.05	-2.02(0.24)	0.06	-2.03(0.27)	0.07	-2.01(0.23)	0.05	-2.04(0.33)	0.1
-5	9	-5.56(2.13)	4.85	-5.52(2.26)	5.36	-5.39(2.36)	5.71	-5.61(2.09)	4.73	-5.87(3.40)	12.3
	25	-5.18(1.09)	1.22	-5.16(1.16)	1.37	-5.17(1.33)	1.80	-5.19(1.08)	1.21	-5.27(1.61)	2.6
	49	-5.10(0.76)	0.58	-5.09(0.81)	0.66	-5.10(0.93)	0.87	-5.10(0.75)	0.57	-5.15(1.09)	1.2
	81	-5.06(0.58)	0.33	-5.05(0.61)	0.38	-5.06(0.70)	0.50	-5.05(0.57)	0.33	-5.09(0.83)	0.6
-10	9	-11.05(4.27)	19.33	-10.99(4.55)	21.68	-8.15(4.20)	21.11	-10.77(3.11)	10.26	-11.71(6.88)	50.2
	25	-10.36(2.22)	5.05	-10.34(2.37)	5.71	-9.67(2.94)	8.74	-10.38(2.08)	4.48	-10.57(3.24)	10.8
	49	-10.18(1.53)	2.38	-10.16(1.64)	2.71	-10.06(1.98)	3.91	-10.19(1.49)	2.24	-10.28(2.19)	4.8
	81	-10.11(1.17)	1.37	-10.11(1.25)	1.56	-10.11(1.45)	2.10	-10.12(1.13)	1.30	-10.18(1.65)	2.7

Tabla 5.1: Resultados de simulacion para 1 look

$n = 2$											
α	m	$\hat{\alpha}_1$		$\hat{\alpha}_{1/2}$		$\hat{\alpha}_1^{ln}$		$\hat{\alpha}_{ML}$		$\hat{\alpha}_{Q_2}$	
		$\hat{\alpha}_1(s_1)$	mse_1	$\hat{\alpha}_{1/2}(s_{1/2})$	$mse_{1/2}$	$\hat{\alpha}_1^{ln}(s_1^{ln})$	mse_1^{ln}	$\hat{\alpha}_{ML}(s_{ML})$	mse_{ML}	$\hat{\alpha}_{Q_2}(s_{Q_2})$	mse_{Q_2}
-1.5	9	-1.66(0.51)	0.29	-1.62(0.49)	0.25	-1.60(0.50)	0.26	-1.60(0.49)	0.25	-1.63(0.67)	0.47
	25	-1.56(0.32)	0.11	-1.54(0.27)	0.07	-1.54(0.28)	0.08	-1.53(0.27)	0.07	-1.55(0.37)	0.14
	49	-1.53(0.20)	0.04	-1.51(0.19)	0.04	-1.52(0.20)	0.04	-1.51(0.19)	0.04	-1.53(0.26)	0.07
	81	-1.52(0.15)	0.02	-1.51(0.15)	0.02	-1.52(0.15)	0.02	-1.50(0.15)	0.02	-1.53(0.20)	0.04
-2	9	-2.18(0.62)	0.41	-2.14(0.62)	0.41	-2.12(0.66)	0.44	-2.14(0.63)	0.41	-2.17(0.86)	0.77
	25	-2.06(0.35)	0.12	-2.05(0.35)	0.12	-2.04(0.36)	0.13	-2.03(0.35)	0.12	-2.06(0.47)	0.22
	49	-2.03(0.25)	0.06	-2.02(0.24)	0.06	-2.03(0.26)	0.07	-2.01(0.24)	0.06	-2.03(0.33)	0.11
	81	-2.02(0.19)	0.04	-2.01(0.19)	0.04	-2.02(0.20)	0.04	-2.00(0.19)	0.04	-2.02(0.25)	0.06
-5	9	-5.30(1.43)	2.12	-5.26(1.46)	2.20	-5.23(1.54)	2.43	-5.31(1.44)	2.16	-5.37(1.96)	3.96
	25	-5.10(0.80)	0.65	-5.09(0.82)	0.68	-5.08(0.87)	0.77	-5.10(0.80)	0.65	-5.13(1.09)	1.20
	49	-5.05(0.56)	0.32	-5.05(0.58)	0.33	-5.05(0.61)	0.38	-5.04(0.56)	0.32	-5.07(0.76)	0.58
	81	-5.03(0.43)	0.19	-5.03(0.45)	0.20	-5.03(0.47)	0.23	-5.02(0.43)	0.19	-5.04(0.58)	0.34
-10	9	-10.52(2.77)	7.96	-10.45(2.85)	8.33	-9.48(3.18)	10.41	-10.50(2.49)	6.46	-10.69(3.77)	14.72
	25	-10.19(1.55)	2.43	-10.16(1.60)	2.58	-10.10(1.76)	3.10	-10.20(1.53)	2.37	-10.26(2.09)	4.43
	49	-10.10(1.09)	1.20	-10.08(1.13)	1.28	-10.09(1.20)	1.45	-10.10(1.08)	1.17	-10.13(1.45)	2.13
	81	-10.06(0.84)	0.71	-10.05(0.87)	0.75	-10.06(0.92)	0.86	-10.05(0.83)	0.69	-10.08(1.12)	1.26

Tabla 5.2: Resultados de simulacion para 2 looks

$n = 4$											
α	m	$\hat{\alpha}_1$		$\hat{\alpha}_{1/2}$		$\hat{\alpha}_1^{ln}$		$\hat{\alpha}_{ML}$		$\hat{\alpha}_{Q_2}$	
		$\hat{\alpha}_1(s_1)$	mse_1	$\hat{\alpha}_{1/2}(s_{1/2})$	$mse_{1/2}$	$\hat{\alpha}_1^{ln}(s_1^{ln})$	mse_1^{ln}	$\hat{\alpha}_{ML}(s_{ML})$	mse_{ML}	$\hat{\alpha}_{Q_2}(s_{Q_2})$	mse_{Q_2}
-1.5	9	-1.63(0.53)	0.30	-1.59(0.42)	0.18	-1.57(0.42)	0.18	-1.57(0.42)	0.18	-1.59(0.55)	0.3
	25	-1.55(0.25)	0.07	-1.54(0.24)	0.06	-1.53(0.24)	0.06	-1.52(0.24)	0.06	-1.53(0.32)	0.1
	49	-1.53(0.18)	0.03	-1.52(0.17)	0.03	-1.52(0.17)	0.03	-1.50(0.17)	0.03	-1.52(0.22)	0.0
	81	-1.52(0.14)	0.02	-1.51(0.13)	0.02	-1.51(0.13)	0.02	-1.49(0.13)	0.02	-1.51(0.17)	0.2
-2	9	-2.14(0.52)	0.29	-2.10(0.520)	0.28	-2.08(0.53)	0.29	-2.08(0.52)	0.28	-2.11(0.69)	0.4
	25	-2.05(0.31)	0.10	-2.04(0.30)	0.09	-2.03(0.31)	0.09	-2.02(0.30)	0.09	-2.04(0.40)	0.1
	49	-2.03(0.22)	0.05	-2.02(0.21)	0.05	-2.02(0.22)	0.05	-2.00(0.21)	0.05	-2.02(0.28)	0.0
	81	-2.02(0.17)	0.03	-2.01(0.16)	0.03	-2.01(0.17)	0.03	-2.00(0.16)	0.03	-2.01(0.22)	0.0
-5	9	-5.19(1.09)	1.23	-5.15(1.10)	1.23	-5.13(1.12)	1.28	-5.17(1.10)	1.24	-5.19(1.41)	2.0
	25	-5.07(0.63)	0.40	-5.05(0.63)	0.40	-5.05(0.65)	0.42	-5.05(0.63)	0.40	-5.07(0.45)	0.2
	49	-5.03(0.45)	0.20	-5.03(0.45)	0.20	-5.03(0.46)	0.21	-5.02(0.45)	0.20	-5.04(0.58)	0.3
	81	-5.02(0.35)	0.12	-5.02(0.35)	0.12	-5.02(0.36)	0.13	-5.00(0.35)	0.12	-5.02(0.45)	0.2
-10	9	-10.29(1.99)	4.05	-10.25(2.01)	4.11	-10.02(2.19)	4.80	-10.29(1.95)	3.88	-10.34(2.57)	6.7
	25	-10.10(1.16)	1.36	-10.09(1.17)	1.38	-10.08(1.21)	1.47	-10.09(1.15)	1.34	-10.13(1.50)	2.2
	49	-10.05(0.82)	0.67	-10.04(0.83)	0.69	-10.05(0.85)	0.73	-10.04(0.81)	0.67	-10.06(1.06)	1.1
	81	-10.03(0.64)	0.40	-10.03(0.64)	0.41	-10.03(0.66)	0.44	-10.02(0.63)	0.40	-10.04(0.82)	0.6

Tabla 5.3: Resultados de simulacion para 4 looks

		$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	
		g/e	g/e	g/e	g/e	g/e Total
$\hat{\alpha}_1$	<i>mse</i>	1/0	2/0	0/0	0/0	3/0
	<i>dvv</i>	1/0	0/0	0/0	0/0	1/0
$\hat{\alpha}_{1/2}$	<i>mse</i>	1/0	1/1	1/2	0/3	3/6
	<i>dvv</i>	4/0	2/1	0/2	0/3	6/6
$\hat{\alpha}_1^n$	<i>mse</i>	0/0	0/0	0/2	0/2	0/4
	<i>dvv</i>	3/0	4/0	3/2	2/2	12/4
$\hat{\alpha}_{ML}$	<i>mse</i>	14/0	12/1	12/3	13/3	51/7
	<i>dvv</i>	8/0	9/1	10/3	11/3	38/7

Tabla 5.5: Comparación de los estimadores usando los criterios del error cuadrático medio y la distancia al verdadero valor

$n = 8$											
α	m	$\hat{\alpha}_1$		$\hat{\alpha}_{1/2}$		$\hat{\alpha}_1^n$		$\hat{\alpha}_{ML}$		$\hat{\alpha}_{Q_2}$	
		$\hat{\alpha}_1(s_1)$	mse_1	$\hat{\alpha}_{1/2}(s_{1/2})$	$mse_{1/2}$	$\hat{\alpha}_1^n(s_1^n)$	mse_1^n	$\hat{\alpha}_{ML}(s_{ML})$	mse_{ML}	$\hat{\alpha}_{Q_2}(s_{Q_2})$	mse
-1.5	9	-1.62(0.44)	0.21	-1.59(0.39)	0.16	-1.57(0.39)	0.15	-1.55(0.39)	0.15	-1.57(0.50)	0
	25	-1.55(0.24)	0.06	-1.53(0.23)	0.05	-1.53(0.22)	0.05	-1.51(0.22)	0.05	-1.53(0.29)	0
	49	-1.55(0.17)	0.03	-1.52(0.16)	0.03	-1.52(0.16)	0.03	-1.50(0.16)	0.03	-1.51(0.21)	0
	81	-1.52(0.13)	0.02	-1.51(0.12)	0.02	-1.51(0.12)	0.02	-1.49(0.12)	0.02	-1.51(0.16)	0
-2	9	-2.12(0.60)	0.38	-2.09(0.47)	0.23	-2.07(0.47)	0.23	-2.06(0.47)	0.23	-2.08(0.6)	0
	25	-2.05(0.28)	0.08	-2.03(0.28)	0.08	-2.03(0.28)	0.08	-2.01(0.28)	0.08	-2.03(0.36)	0
	49	-2.02(0.20)	0.04	-2.02(0.20)	0.04	-2.02(0.20)	0.04	-2.00(0.20)	0.04	-2.01(0.25)	0
	81	-2.01(0.16)	0.03	-2.01(0.15)	0.02	-2.01(0.15)	0.02	-1.99(0.15)	0.02	-2.01(0.20)	0
-5	9	-5.14(0.91)	0.86	-5.12(0.91)	0.85	-5.10(0.92)	0.86	-5.11(0.92)	0.85	-5.13(1.15)	1
	25	-5.05(0.54)	0.29	-5.04(0.54)	0.29	-5.04(0.54)	0.29	-5.03(0.54)	0.29	-5.05(0.68)	0
	49	-5.30(0.38)	0.15	-5.02(0.38)	0.15	-5.02(0.39)	0.15	-5.01(0.38)	0.15	-5.02(0.49)	0
	81	-5.02(0.30)	0.09	-5.01(0.30)	0.09	-5.02(0.30)	0.09	-5.00(0.30)	0.09	-5.02(0.38)	0
-10	9	-10.19(1.56)	2.48	-10.16(1.57)	2.47	-10.11(1.61)	2.60	-10.17(1.56)	2.45	-10.20(1.97)	8
	25	-10.06(0.92)	0.85	-10.05(0.92)	0.86	-10.05(0.94)	0.88	-10.04(0.92)	0.85	-10.07(1.18)	1
	49	-10.04(0.65)	0.43	-10.03(0.65)	0.43	-10.03(0.66)	0.44	-10.01(0.65)	0.42	-10.04(0.83)	0
	81	-10.02(0.51)	0.26	-10.01(0.51)	0.26	-10.02(0.52)	0.27	-9.99(0.51)	0.26	-10.02(0.65)	0

Tabla 5.4: Resultados de simulacion para 8 looks

5.3 Aplicación

Como aplicación, se analizó un corte de la imagen original con el estimador $\hat{\alpha}_{ML}$. Este corte es una línea en rojo en la figura 5-1, que está trazada sobre un área urbana interrumpida por un área más homogénea. En esta imagen se ven tres regiones bien diferenciadas con distinto grado de homogeneidad, que se detallan en la tabla 5.6 y se dan los valores de los parámetros estimados de cada una de las distribuciones con que fueron ajustadas cada zona. El resultado de estimar α en esta transecta, usando una ventana deslizante de tamaño 7×7 pixels, se presenta en la

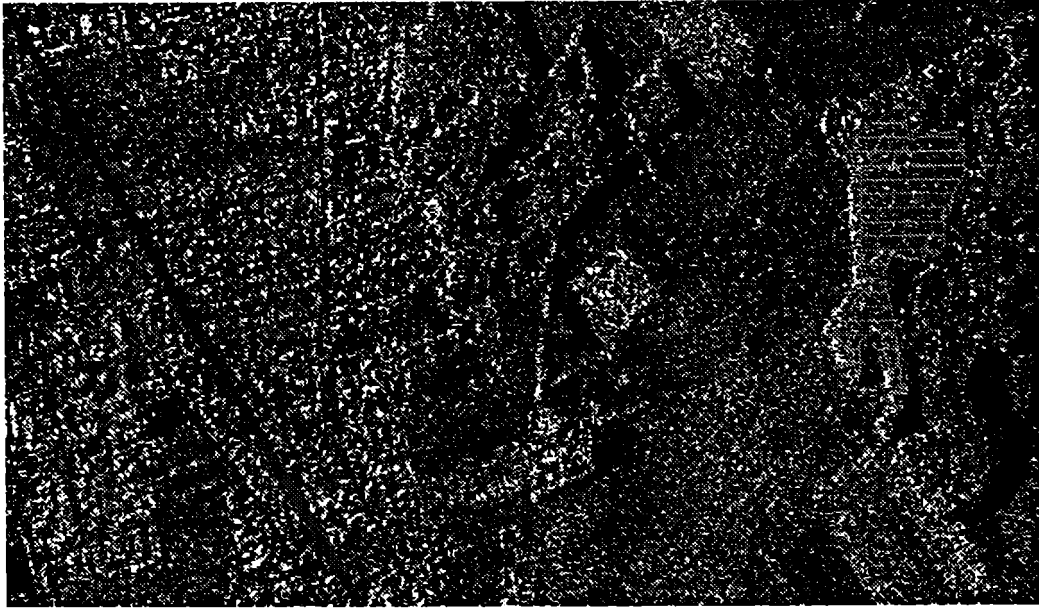


Figura 5-1: Area original bajo estudio y las clases analizadas: cultivo (amarillo), selva (verde), y urbana (violeta).

figura 5-2. Recordando que el parámetro α mide la heterogeneidad, entonces se ve claramente que esta estimación detecta ambas regiones, la urbana (extremadamente heterogénea) y el bosque (menos heterogénea que la primera)

Otra aplicación de este tema se verá en el Capítulo 7 donde se presentarán imágenes generadas con muestras provenientes de variables aleatorias distribuidas $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$, para diferentes valores de (α, γ, n) , que simularán áreas con diferente grado de homogeneidad, brillo y número de looks. En estos casos la estimación de los parámetros α y γ se realizó en forma conjunta, fijando el valor n , y utilizando el estimador por el método de los momentos de orden 1 y 1/2.

Tipo de Cobertura	Tamaño	Color	$\Gamma^{1/2}(1, 1/\hat{\beta})$	$\mathcal{K}_A(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, 1)$	$\mathcal{G}_A^0(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, 1)$
Campos	26681	Rojo	91156.5[.47]	$(31.60, 3.46 \cdot 10^{-4})[.47]$	$(-24.10, 2.12 \cdot 10^6)[.50]$
Bosque	15886	Verde	85550.6[.00]	$(3.83, 4.47 \cdot 10^{-5})[.84]$	$(-4.02, 2.63 \cdot 10^5)[.66]$
Area Urbana	65650	Violeta	271205.0[.00]	$(0.36, 1.34 \cdot 10^{-6})[.00]$	$(-1.20, 7.65 \cdot 10^4)[.43]$

Tabla 5.6: Características principales de las muestras, estimación de los parámetros y el -valor del test de χ^2 (entre corchetes) para las tres distribuciones consideradas.

En este capítulo se vieron los algoritmos básicos para generar variables aleatorias con distribuciones $\Gamma^{1/2}$, \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 .

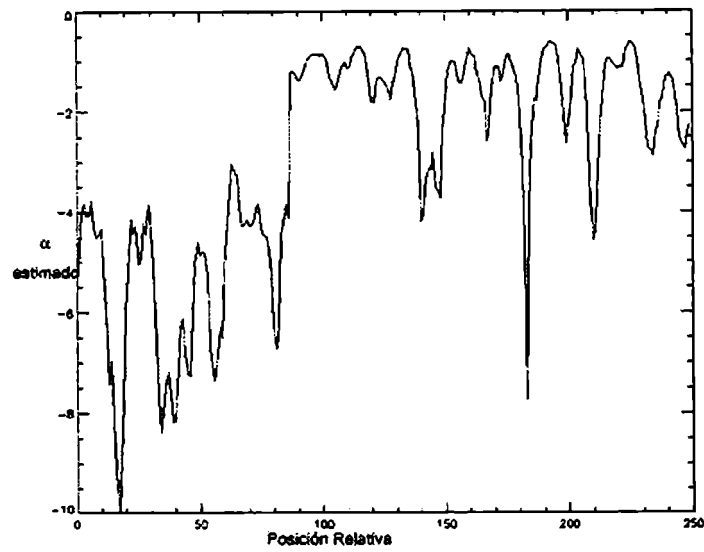


Figura 5-2: Valores estimados localmente del parámetro α , de un corte de la imagen original (línea roja), usando una ventana deslizante de 7×7 .

Se presentaron de siete estimadores para el parámetro α , conocidos γ y n , y mediante un estudio de Monte Carlo se obtuvo el comportamiento de estos métodos sacando conclusiones sobre de cada uno de ellos.

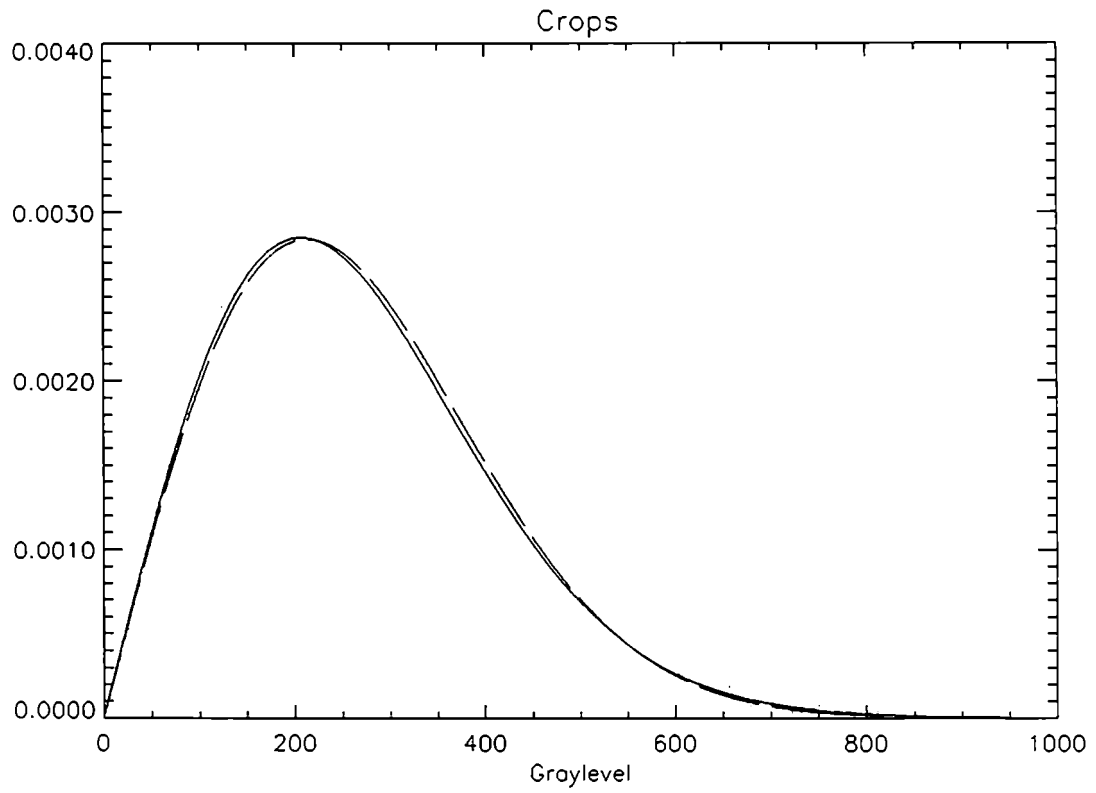


Figura 5-3: Histograma de la clase cultivo junto con el ajuste de tres curvas de las distribuciones: $\Gamma^{1/2}$ (trazos cortos), \mathcal{K}_A (trazos largos) and \mathcal{G}_A^0 (lineas sólidas, respectivamente).

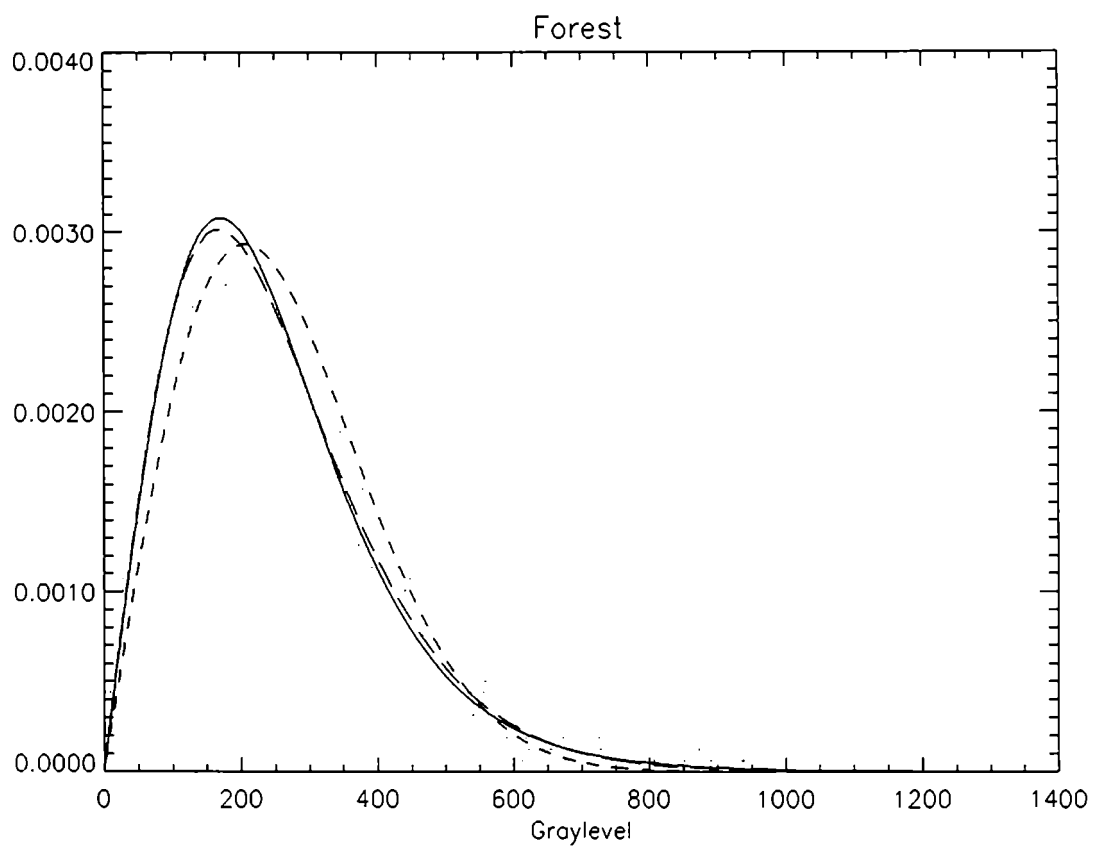


Figura 5-4: Histograma de la clase Selva junto con el ajuste de tres curvas de las distribuciones: $\Gamma^{1/2}$ (trazos cortos), \mathcal{K}_A (trazos largos) and \mathcal{G}_A^0 (lineas sólidas, respectivamente).

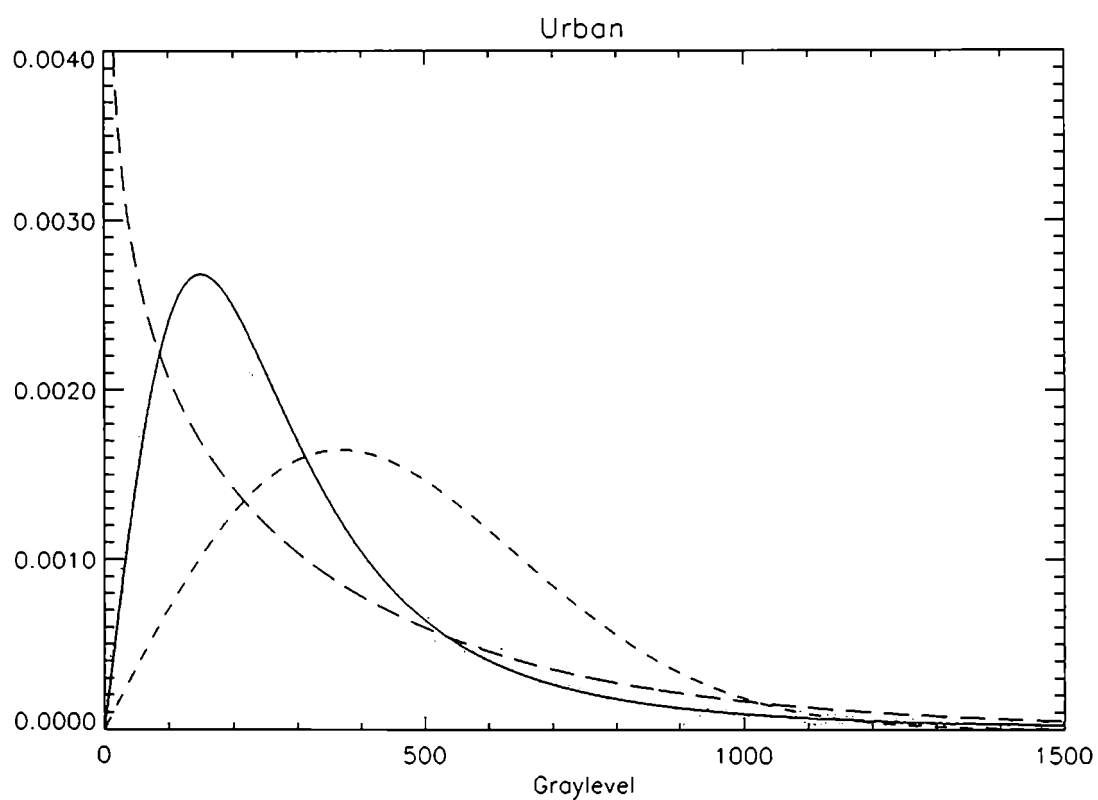


Figura 5-5: Histograma de la clase urbana junto con el ajuste de tres curvas de las distribuciones: $\Gamma^{1/2}$ (trazos cortos), \mathcal{K}_A (trazos largos) and \mathcal{G}_A^0 (lineas sólidas, respectivamente).

Capítulo 6

Substitución de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0

En este capítulo se estudiará la factibilidad de substituir la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 en el ajuste de datos. Es decir, se verificará que para los datos distribuidos $\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)$, para alguna terna (α_K, λ, n) , siempre se podrá encontrar una terna (α_G, γ, n) tal que esos datos sean ajustados con una distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)$ con un cierto nivel de calidad. Con este fin se propondrá una aproximación entre ambas distribuciones.

El objetivo de este estudio es verificar que la aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 tiene sentido práctico. De ser posible esta aproximación, se podrá considerar a las imágenes SAR bajo el modelo de la distribución \mathcal{G}_A^0 únicamente. Aún cuando sea posible establecer una correspondencia entre parámetros de la distribución \mathcal{K}_A y de la distribución \mathcal{G}_A^0 , este no es el objetivo final, ya que lo que se propone en este trabajo es utilizar directamente la distribución \mathcal{G}_A^0 como el modelo estadístico de las imágenes SAR.

El problema de aproximación se encarará de dos formas: una analítica, donde se propondrá una distancia entre las dos distribuciones la cual se intentará minimizar, para obtener una correspondencia entre ellas; y la segunda, muestral, que consistirá en medir las distancias entre distribuciones empíricas y distribuciones teóricas.

En este trabajo el interés final se concentra en el segundo enfoque, pero para tener una idea de la calidad de esta aproximación se harán algunos estudios simplificados y no necesariamente

concluyentes dentro del primer enfoque planteado.

Para atacar el problema teórico una primera simplificación consistirá en considerar la aproximación de las distribuciones que se utilizan para modelar el backscatter amplitud, esto es, se estudiará la aproximación de la distribución $\Gamma^{1/2}$ por la distribución $\Gamma^{-1/2}$, sin considerar la influencia del ruido *speckle* que es común a ambas. Sin embargo, hecha esta aproximación, se verá que aún esta simplificación no permitió establecer una correspondencia entre pares (α_K, λ) y pares (α_G, γ) en forma analítica, como se puede ver en la ecuación (6.19) de la sección 6.4.

Por otro lado, esta correspondencia solamente daría información sobre cuáles distribuciones \mathcal{G}_A^0 estarían a una distancia dada de la distribución \mathcal{K}_A . Por lo tanto, dadas estas condiciones, carece de sentido práctico resolver numéricamente la aproximación de la distribución $\Gamma^{1/2}$ por la distribución $\Gamma^{-1/2}$. Sumándole el hecho de que el costo involucrado en dicha aproximación será del mismo orden que el de la resolución numérica de la aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 , queda justificado el hecho de no haber realizado esta aproximación.

Para aproximar la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 , se propondrá en la sección 6.1 la distancia L_2 entre sus respectivas densidades, justificando el por qué de su elección. Se minimizará esta distancia para obtener una correspondencia entre distribuciones, y se lo hará numéricamente a causa de la gran complejidad que involucraría la minimización analítica. Se mostrará también que, bajo el modelo multiplicativo basta probar que las distribuciones que corresponden a los *backscatters* se aproximan.

Ya que el número de looks es el mismo para ambas distribuciones, los parámetros de escala en las dos situaciones son hallados a partir de considerar únicamente las distribuciones con media unitaria a fin de poder ser comparadas. Se establecerá entonces una correspondencia entre los parámetros de ambas distribuciones.

Se medirá la calidad del ajuste de datos \mathcal{K}_A al ajustarlos con la distribución \mathcal{G}_A^0 , utilizando el test de adherencia χ^2 en una experiencia Monte Carlo y se medirá el tamaño de la muestra mínima para aceptar la hipótesis. Este test de adherencia también sirve para justificar la elección de la distancia utilizada, entre otras posibles que también son presentadas en las secciones que siguen.

6.1 Distancia entre distribuciones

Definiremos aquí el criterio de aproximación a ser utilizado. Consideremos, entonces, el conjunto de todas las distribuciones que admiten densidad y denotémoslo \mathcal{D} . Para establecer la noción de proximidad entre distribuciones en \mathcal{D} utilizaremos una distancia L_2 , que denotaremos d_2 : $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$ y viene dada através de la relación:

$$d_2^2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(z) - f_2(z)|^2 dz, \quad (6.1)$$

donde f_1 y f_2 son las densidades que caracterizan las distribuciones \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , respectivamente.

Se utilizará la distancia L_2 porque es tratable numéricamente y, principalmente, porque que en el área de procesamiento de imágenes SAR, la calidad de ajuste entre datos y distribuciones se hace prioritariamente através del test de χ^2 . Este test es la versión estadística discreta de la distancia L_2 .

Otra opción sería utilizar la distancia L_1 definida como

$$d_1(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(z) - f_2(z)| dz$$

Pero no tiene contrapartida estadística discreta de uso frecuente en el área.

Una tercera opción, es la distancia L_∞ , definida $d_\infty(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \sup_z |F_1(z) - F_2(z)|$, donde F es la función de distribución acumulada que caracteriza la distribución \mathcal{D} . El uso de esta distancia se concreta de forma estadística discreta en el test de Kolmogorov-Smirnov que requiere el uso explícito de las funciones de distribución acumuladas F_1 y F_2 .

Se presentaron en el Capítulo 3 las funciones de distribución acumuladas de la distribución \mathcal{G}_A^0 y de la distribución \mathcal{K}_A . El cómputo aproximado de la función de distribución acumulada de variables aleatorias con distribución \mathcal{K}_A , propuesto en [YFS95], además de imponer restricciones sobre el espacio de parámetros, involucra el uso de una función recursiva que a su vez requiere la utilización de funciones de Bessel. A estas desventajas de orden práctico de la utilización de la distancia L_∞ sigue el hecho que en la práctica el uso del test de Kolmogorov-Smirnov es poco frecuente para ajuste de datos y distribuciones.

Otras distancias que puedan ser definidas no tienen ningún interés para las aplicaciones enfocadas en esta área. En la sección se propone y evalúa una forma de aproximar las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 a través de un método que no utiliza explícitamente la noción de distancias entre ellas.

6.2 Aproximación de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0

Serán estudiadas únicamente aquellas distribuciones $\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)$ y $\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma_G, n)$ de media unitaria para poder comparar las dos distribuciones. De esta manera, para la distribución \mathcal{K}_A , conocido el número de looks n y el parámetro de homogeneidad α_K , el parámetro de escala λ , que denotaremos con λ^* , está dado por:

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \left(\frac{\Gamma(\alpha_K + 1/2) \Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(\alpha_K) \Gamma(n)} \right)^2. \quad (6.2)$$

Análogamente, las distribuciones \mathcal{G}_A^0 (con el mismo número de looks n) serán indexadas únicamente por su respectivo parámetro de homogeneidad α_G , ya que el parámetro de escala está dado por la relación:

$$\gamma^* = n \left(\frac{\Gamma(-\alpha_G) \Gamma(n)}{\Gamma(-\alpha_G - 1/2) \Gamma(n + 1/2)} \right)^2. \quad (6.3)$$

Así siendo, para cada α_K queremos hallar α_G que minimice la distancia

$$d = \int_0^\infty 4 \left(\frac{2(\lambda^* n)^{\frac{\alpha_K + n}{2}}}{\Gamma(n)} z^{\alpha_K + n - 1} K_{\alpha_K - n}(2z\sqrt{\lambda^* n}) - \frac{n^n (\gamma^*)^{-\alpha_G}}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n - \alpha_G)}{\Gamma(-\alpha_G)} \frac{z^{2n-1}}{(\gamma^* + nz^2)^{n-\alpha_G}} \right)^2 dz, \quad (6.4)$$

con λ^* y γ^* los valores que hacen las medias unitarias. Como se ve en la ecuación (6.4), no es obvio que se pueda encontrar una solución analíticamente. Antes de buscar una solución numéricamente, veremos un resultado que, aunque no resuelve el problema de encontrar analíticamente el valor de α_G que minimiza esta distancia, simplifica los cálculos y permite entrever la solución.

6.3 Aproximación de las distribuciones del retorno através de las distribuciones del *backscatter*

Como ya dijimos, nuestro objetivo es substituir la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 , que son los modelos propuestos para el retorno. Recordemos que ambas distribuciones provienen de multiplicar variables aleatorias independientes. La primera se obtiene multiplicando dos raíces cuadradas de Gamma, y la segunda una raíz cuadrada de Gamma por una recíproca de raíz cuadrada de Gamma. En ambos casos, un término de la multiplicación obedece una distribución raíz cuadrada de Gamma, el correspondiente al ruido *speckle*, ésto es, lo que cambia de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 es solamente la distribución del *backscatter*.

En esta sección probaremos que cuando las distribuciones para el *backscatter* están próximas entre sí entonces los retornos también lo están. Ésto se traduce de la siguiente manera, si la distancia L_2 entre las densidades de las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ y $\Gamma^{-1/2}$ es muy pequeña entonces la distancia L_2 entre las densidades de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 también lo es.

Consideremos, las variables aleatorias Z_1 y Z_2 tales que $Z_1 \sim \mathcal{K}_A$ y $Z_2 \sim \mathcal{G}_A^0$. Bajo el modelo multiplicativo cada una de ellas se obtiene como el producto de dos variables aleatorias independientes, una que modela el *backscatter* y la otra el ruido *speckle*. EL *backscatter*, en el caso del retorno con distribución \mathcal{K}_A tiene distribución $\Gamma^{1/2}$ y en el caso del retorno con distribución \mathcal{G}_A^0 , tiene distribución $\Gamma^{-1/2}$, en ambos casos el *speckle* está modelado como una variable aleatoria distribuída bajo la misma ley.

Entonces, todo esto queda resumido en el siguiente

Teorema 50 Sean X_1 y X_2 variables aleatorias tales que $X_1 \sim \Gamma^{1/2}(\alpha_1, \beta_1)$ y $X_2 \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha_2, \beta_2)$, $Y \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$, $Z_1 = X_1 Y$ y $Z_2 = X_2 Y$. Entonces $d_2(f_{Z_1}, f_{Z_2}) < M(n_0) d_2(f_{X_1}, f_{X_2})$, con $M(n_0)$ constante que depende del número de looks.

Demostración

Consideremos $d_2(f_{Z_1}, f_{Z_2})$ la distancia entre distribuciones definida en la ecuación (6.1). Las funciones de densidad de Z_1 y Z_2 , definidas bajo el modelo multiplicativo, vienen dadas por:

$$f_{Z_1}(z) = \int_0^\infty f_{X_1}\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) \frac{1}{y} dy \text{ y } f_{Z_2}(z) = \int_0^\infty f_{X_2}\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) \frac{1}{y} dy \quad (6.5)$$

Consideremos la distancia entre f_{Z_1} y f_{Z_2} ,

$$\begin{aligned} d^2(f_{Z_1}, f_{Z_2}) &= \int_0^\infty |f_{Z_1}(z) - f_{Z_2}(z)|^2 dz = \\ &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty f_{X_1}\left(\frac{z}{y}\right) \frac{f_Y(y)}{y} dy - \int_0^\infty f_{X_2}\left(\frac{z}{y}\right) \frac{f_Y(y)}{y} dy \right|^2 dz = \\ &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \left(f_{X_1}\left(\frac{z}{y}\right) - f_{X_2}\left(\frac{z}{y}\right) \right) \frac{f_Y(y)}{y} dy \right|^2 dz \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \left| f_{X_1}\left(\frac{z}{y}\right) - f_{X_2}\left(\frac{z}{y}\right) \right|^2 \left| \frac{f_Y(y)}{y} \right|^2 dy dz \end{aligned}$$

haciendo cambio en el orden de integración, queda:

$$\int_0^\infty \left| \frac{f_Y(y)}{y} \right|^2 \int_0^\infty \left| f_{X_1}\left(\frac{z}{y}\right) - f_{X_2}\left(\frac{z}{y}\right) \right|^2 dz dy \quad (6.6)$$

luego haciendo el cambio de variable:

$$\frac{z}{y} = t \text{ y } dz = y dt$$

y reemplazando en (6.6) y utilizando la definición de d_2 obtenemos:

$$\int_0^\infty \left| \frac{f_Y(y)}{y} \right|^2 y \left(\int_0^\infty |f_{X_1}(t) - f_{X_2}(t)|^2 dt \right) dy = d_2(f_{X_1}, f_{X_2}) \int_0^\infty \left| \frac{f_Y(y)}{y} \right|^2 dy \quad (6.7)$$

Bastaría ver que $\int_0^\infty \left| \frac{f_Y(y)}{y} \right|^2 dy$ está acotada. Como $Y \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$, su función de densidad viene dada por:

$$f_Y(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2} \quad (6.8)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{|f_Y(y)|^2}{y} dy &= \int_0^{\infty} \frac{n^{2n}}{\Gamma^2(n)} y^{4n-3} e^{-2ny^2} dy = \\
 &= \frac{n^{2n}}{\Gamma^2(n)} \int_0^{\infty} y^{4n-3} e^{-2ny^2} dy
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$2ny^2 = w \text{ y } dy = \frac{dw}{2^{3/2} n^{1/2} w^{1/2}}$$

Luego reemplazando en (6.9) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{|f_Y(y)|^2}{y} dy &= \frac{n^{2n}}{\Gamma^2(n)} \int_0^{\infty} \left(\frac{w}{2n}\right)^{\frac{4n-3}{2}} e^{-w} \frac{1}{2^{3/2} n^{1/2} w^{1/2}} dw = \\
 &= \frac{n}{2^{2n} \Gamma^2(n)} \int_0^{\infty} w^{2n-2} e^{-w} dw = \frac{n \Gamma(2n-1)}{2^{2n} \Gamma^2(n)}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Pero $\frac{n \Gamma(2n-1)}{2^{2n} \Gamma^2(n)}$ crece lentamente en función de n y como ya vimos, no consideramos valores grandes para el número de looks de las imágenes SAR, entonces para un cierto valor $n = n_0$ fijo, la cantidad $\frac{n \Gamma(2n-1)}{2^{2n} \Gamma^2(n)}$ permanece acotada. La figura (6-1) muestra la variación de (6.10) con respecto a n . Luego para $n = n_0$ fijo, tomemos $M_{(n_0)} = \frac{n_0 \Gamma(2n_0-1)}{2^{2n_0} \Gamma^2(n_0)}$ y usando la ecuación (6.7) se tiene que $d(f_{Z_1}, f_{Z_2}) < M_{(n_0)} d_2(f_{X_1}, f_{X_2})$, que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto, podemos afirmar que si la distancia entre las densidades de los *backscatters* es pequeña entonces la distancia entre los retornos también lo es.

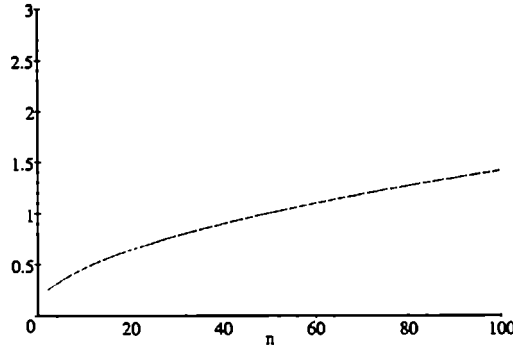


Figura 6-1: Gráfico que muestra la variación de $\frac{n\Gamma(2n-1)}{2^{2n}\Gamma^2(n)}$ en función de n

6.4 Aproximación de las distribuciones de *backscatter*

Considerando el modelo multiplicativo como en la sección anterior, en esta sección vamos a calcular la distancia L_2 entre las densidades correspondientes a los *backscatters*. Como ya dijimos anteriormente, aún cuando el cálculo de la distancia entre las funciones de densidad correspondientes a las respectivas distribuciones se haya simplificado, con respecto a la distancia calculada para las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 , no es posible minimizar esta distancia analíticamente. Se presentarán los resultados y en la sección siguiente se resolverá el problema numéricamente.

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias que obedecen las distribuciones $\Gamma^{1/2}(\alpha_1, \lambda)$ y $\Gamma^{-1/2}(\alpha_2, \gamma)$ respectivamente. Llamemos f_{X_1} y f_{X_2} a las respectivas densidades, cuyas fórmulas vienen dadas a continuación:

$$f_{X_1}(x) = \frac{2\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{2\alpha_1-1} e^{-\lambda x^2}, \quad \alpha_1, \lambda > 0$$

$$f_{X_2}(x) = \frac{2}{\gamma^{\alpha_2}\Gamma(-\alpha_2)} x^{2\alpha_2-1} e^{-\gamma x^{-2}}, \quad -\alpha_2, \gamma > 0$$

La distancia L_2 entre estas dos densidades es:

$$d^2(f_{X_1}, f_{X_2}) = \int_0^\infty \left(\frac{2\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{2\alpha_1-1} e^{-\lambda x^2} - \frac{2}{\gamma^{\alpha_2}\Gamma(-\alpha_2)} x^{2\alpha_2-1} e^{-\gamma x^{-2}} \right)^2 dx$$

Recordando que

$$d^2(f_{X_1}, f_{X_2}) = \int_0^\infty (f_{X_1}(x, a_1) - f_{X_2}(x, a_2))^2 dx = \quad (6.11)$$

$$= \int_0^\infty f_{X_1}^2(x; a_1) dx - 2 \int_0^\infty f_{X_1}(x; a_1) f_{X_2}(x; a_2) dx + \int_0^\infty f_{X_2}^2(x; a_2) dx. \quad (6.12)$$

desarrollamos cada uno de los términos por separado. El primer término será:

$$\int_0^\infty f_{X_1}^2(x; a_1) dx = \int_0^\infty \frac{4\lambda^{2\alpha_1}}{\Gamma^2(\alpha_1)} x^{2(2\alpha_1-1)} e^{-2\lambda x^2} dx. \quad (6.13)$$

Haciendo el cambio de variables:

$$2\lambda x^2 = y \text{ y } dx = \left(\frac{\lambda}{2^3 x} \right)^{1/2} dy$$

y reemplazando en (6.13) se tiene:

$$\frac{1}{\lambda^{-1/2} 2^{2\alpha_1-3/2} \Gamma^2(\alpha_1)} \int_0^\infty y^{2\alpha_1-\frac{1}{2}-1} e^{-y} dy.$$

Luego, el primer término de (6.12) será:

$$\int_0^\infty f_{X_1}^2(x; a_1) dx = \frac{\Gamma(2\alpha_1 - \frac{1}{2})}{\lambda^{-1/2} 2^{2\alpha_1-3/2} \Gamma^2(\alpha_1)}. \quad (6.14)$$

Desarrollando el último término de (6.12)

$$\int_0^\infty f_{X_2}^2(x; a_2) dx = \int_0^\infty \frac{4}{\gamma^{2\alpha_2} \Gamma^2(-\alpha_2)} x^{4\alpha_2-2} e^{-2\gamma x^{-2}} dx =$$

$$= \frac{4}{\gamma^{2\alpha_2} \Gamma^2(-\alpha_2)} \int_0^\infty \frac{e^{-2\gamma x^{-2}}}{x^{-4\alpha_2+2}} dx. \quad (6.15)$$

Haciendo un cambio de variable:

$$2\gamma x^{-2} = y, \text{ luego } dx = \frac{-y^{-\frac{3}{2}}}{2\gamma^{1/2}} dy;$$

luego, reemplazando en (6.15), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_{X_2}^2(x; \alpha_2) dx &= \frac{1}{2^{-2\alpha_2+5/2} \gamma^{-2\alpha_2+3/2} \Gamma^2(-\alpha_2)} \int_0^\infty e^{-y} y^{-2\alpha_2+\frac{1}{2}-1} dy = \\ &= \frac{\Gamma(-2\alpha_2 + \frac{1}{2})}{2^{-2\alpha_2+5/2} \gamma^{-2\alpha_2+3/2} \Gamma^2(-\alpha_2)}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Desarrollemos el segundo término de la ecuación (6.12), correspondiente a la integral del producto de las dos densidades.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_{X_1}(x; \alpha_1) f_{X_2}(x; \alpha_2) dx &= \frac{4\lambda^{\alpha_1}}{\gamma^{\alpha_2} \Gamma(-\alpha_2) \Gamma(\alpha_1)} \int_0^\infty x^{2(\alpha_1+\alpha_2-1)} e^{-(\lambda x^2 + \gamma x^{-2})} dx = \\ &= \frac{4\lambda^{\alpha_1}}{\gamma^{\alpha_2} \Gamma(-\alpha_2) \Gamma(\alpha_1)} \int_0^\infty x^{2(\alpha_1+\alpha_2-1)} e^{-\sqrt{\lambda\gamma}(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}x^2 + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}x^{-2})} dx. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Haciendo el siguiente cambio de variables:

$$x^2 = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{1/2} y, \text{ y } dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{1/4} \frac{1}{y^{1/2}} dy$$

y reemplazando en (6.17), obtenemos:

$$\int_0^\infty f_{X_1}(x; \alpha_1) f_{X_2}(x; \alpha_2) dx = (\lambda\gamma)^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{4}{\Gamma(-\alpha_2) \Gamma(\alpha_1)} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda\gamma}(y+y^{-1})} y^{\alpha_1+\alpha_2-\frac{3}{2}} dy =$$

$$= \frac{4}{\Gamma(-\alpha_2)\Gamma(\alpha_1)} (\lambda\gamma)^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\alpha_1+\alpha_2-\frac{1}{2}}(2\sqrt{\lambda\gamma}), \quad (6.18)$$

donde $K_\nu(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\omega(y^{-1}+y)} y^{v-1} dy$ es la función de Bessel de tercera especie y de orden ν .

Entonces, por (6.11), (6.14), (6.16) y (6.18) la distancia entre las dos densidades será:

$$\frac{\Gamma(2\alpha_1 - \frac{1}{2})}{\lambda^{-1/2} 2^{2\alpha_1-3/2} \Gamma^2(\alpha_1)} + \frac{\Gamma(-2\alpha_2 + \frac{1}{2})}{2^{-2\alpha_2+5/2} \gamma^{-2\alpha_2+3/2} \Gamma^2(-\alpha_2)} - \quad (6.19)$$

$$- \frac{2}{\Gamma(-\alpha_2)\Gamma(\alpha_1)} (\lambda\gamma)^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\alpha_1+\alpha_2-\frac{1}{2}}(2\sqrt{\lambda\gamma}) \quad (6.20)$$

La complejidad de esta última nos lleva a formular el problema numéricamente. Es decir, se tratará de hallar el parámetro α_2 que minimice (6.19) para un dado α_1 , como se verá en la siguiente sección.

6.5 Aproximación numérica de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0

En esta sección se tratará el problema de la minimización de la distancia entre las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 en forma numérica. El método de optimización utilizado fue el método de Amoeba que realiza una minimización multidimensional, usando el método simplex de Nelder y Mead (Computer Journal Vol.7. pp 308-313). La rutina escrita en lenguaje IDL está basada en la rutina amoeba descrita en la sección 10.4 del numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing (second edition) Cambridge University Press. La implementación se llevó a cabo con precisión 10^{-4} .

Aún cuando el parámetro α_K varía, en principio, sobre todos los reales positivos, para los fines de este estudio se hará una búsqueda en el intervalo $[4, 10]$. Valores muy pequeños de α_K ($0 < \alpha_K < 4$) corresponden a datos de áreas extremadamente heterogéneas, que no son bien ajustadas por la distribución \mathcal{K}_A y sí por la distribución \mathcal{G}_A^0 , tal como se ve en [FMYS97]; luego, para estos datos no es necesario disponer de una aproximación. Para valores de α_K superiores a 10, los datos observados son muy bien modelados por la distribución $\Gamma^{1/2}$ (ver [FMYS97, YFS⁺93, YFS95]), que también es un caso particular de la distribución \mathcal{G}_A^0 . De esta manera,

$n = 1$			
α_K	α_G	λ^*	γ^*
4.	-4.3	2.95	4.53
5.	-5.3	3.73	5.42
6.	-6.3	4.52	6.69
7.	-7.3	5.30	7.96
8.	-8.3	6.09	9.23
9.	-9.3	6.87	10.50
10.	-10.3	7.66	11.78

Tabla 6.1: En esta tabla se muestra, para 1 look, los valores de α_K y sus correspondientes valores de α_G que minimizan la integral. Se muestran también los valores correspondientes a los dos parámetros de escala λ y γ , para datos con media unitaria.

$n = 2$			
α_K	α_G	λ^*	γ^*
4.	-4.4	3.32	3.68
5.	-5.4	4.20	4.81
6.	-6.4	5.08	5.94
7.	-7.4	5.96	7.07
8.	-8.3	6.85	8.21
9.	-9.3	7.73	9.34
10.	-10.3	8.61	10.47

Tabla 6.2: Idem que tabla 6.1 para 2 looks

la única región donde se hace necesario aproximar la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 es aquella donde $4 \leq \alpha_K \leq 10$.

Para estos valores de α_K se puede ver en las tablas 6.1, 6.2 y 6.3 los valores correspondientes al parámetro α_G obtenido como resultado de la minimización numérica de la integral dada por la fórmula (6.4), que expresa la distancia L^2 entre las densidades de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 . Los valores representados por λ^* y γ^* son los valores de λ y γ tal que la media sea unitaria para ambas distribuciones, respectivamente.

Como caso de interés particular se consideró el número de looks $n = 1$. En la tabla 6.4, se muestra el valor dmin correspondiente al mínimo de la integral (6.4) para cada valor de α_K con $4 \leq \alpha_K \leq 10$ y paso 0.5 y para su correspondiente valor α_G que minimiza dicha integral, como se puede notar estos valores son del orden de 10^{-4} o menores.

La figura 6-2 muestra las densidades de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 para un valor fijo de α_K y el α_G correspondiente a la minimización de la distancia L_2 . Para valores de $n = 1$, se

$n = 4$			
α_K	α_G	λ^*	γ^*
4.	-2.9	3.53	3.45
5.	-5.5	4.46	4.53
6.	-6.4	5.40	5.59
7.	-7.4	6.34	6.65
8.	-8.4	7.28	7.72
9.	-9.4	8.22	8.78
10.	-10.4	9.16	9.84

Tabla 6.3: Idem que tabla 6.1 para 4 looks

$n = 1$		
α_K	α_G	dmin
4.0	-4.29	$2.48180 \cdot 10^{-4}$
4.5	-4.82	$1.87200 \cdot 10^{-4}$
5.0	-5.32	$1.12991 \cdot 10^{-5}$
5.5	-5.81	$9.18697 \cdot 10^{-5}$
6.0	-6.50	$6.79934 \cdot 10^{-5}$
6.5	-6.79	$5.14175 \cdot 10^{-5}$
7.0	-7.29	$3.96089 \cdot 10^{-5}$
7.5	-7.78	$3.10125 \cdot 10^{-5}$
8.0	-8.28	$2.46307 \cdot 10^{-5}$
8.5	-8.77	$1.98130 \cdot 10^{-5}$
9.0	-9.28	$1.61180 \cdot 10^{-5}$
9.5	-9.77	$1.32493 \cdot 10^{-5}$
10.	-10.27	$1.09913 \cdot 10^{-5}$

Tabla 6.4: se muestra el valor correspondiente al minimo de la integral para cada valor de α_K , entre 4 y 10, con paso 0.5 y para el correspondiente valor α_G que minimiza dicha integral.

consideró $\alpha_K = 4$ y $\alpha_G = -4.29$ que es el valor de α_G que minimiza la distancia L^2 y los valores de los parámetros λ y γ fueron tomados de tal manera que la media de ambas distribuciones sea unitaria. También se muestran en la figura 6-3 las densidades de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 para $n = 1$, $\alpha_K = 8$ y $\alpha_G = -8.3$, y vemos que la diferencia en este caso disminuyó con respecto al caso anterior, hecho que se puede corroborar en la tabla 6.4. Puede notarse, en cada una de las figuras recién mencionadas, que la diferencia entre las densidades de las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 es **muy** pequeña, lo que permitirá en la práctica utilizar la distribución \mathcal{G}_A^0 en lugar de la \mathcal{K}_A . Fijando un valor de α_K , la distancia entre las dos distribuciones es una función que depende de α_G y que tiene un mínimo dentro de un entorno de $-\alpha_K$. La figura 6-4 muestra las dos densidades para $\alpha_K = 1$ y $\alpha_G = -1$ donde, en este caso, se observa que la diferencia entre las curvas aumenta cuando disminuye el valor de α_K pero, como ya dijimos anteriormente, para estos casos ($\alpha_K < 4$) el mejor modelo de ajuste es la distribución \mathcal{G}_A^0 y, por lo tanto, no habría razón para querer aproximar la distribución \mathcal{K}_A (ver [FMYS97]). En la figura 6-5 se muestran dos curvas que corresponden, para valores fijos $\alpha_K = 4$ y $\alpha_K = 8$ respectivamente, a la variación de la distancia, en función del parámetro α_G , entre la distribución \mathcal{K}_A y la distribución \mathcal{G}_A^0 . Se puede notar que el mínimo en cada curva es alcanzado para valores de α_G que caen dentro de un entorno pequeño de $-\alpha_K$.

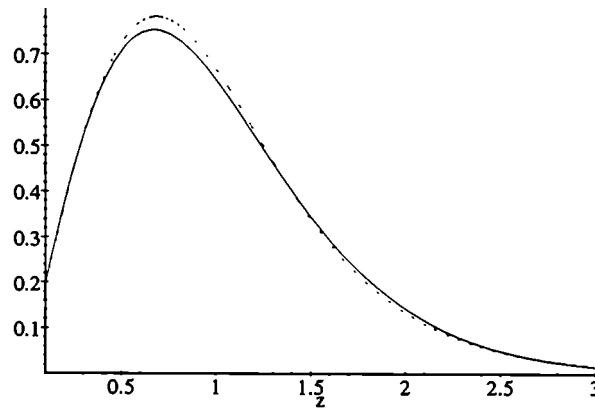


Figura 6-2: Densidades $\mathcal{K}_A(4, 2.95, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A^0(-4.29, 4.52, 1)$ (punteada)

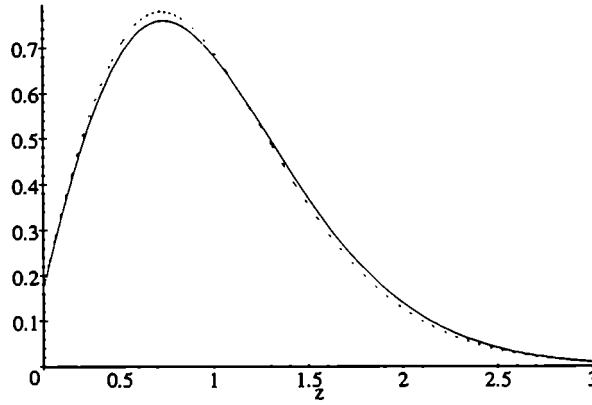


Figura 6-3: Densidades $\mathcal{K}_A(8, 6.09, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A^0(-8.28, 9.23, 1)$ (punteada)

6.6 Ajuste de datos de distribución \mathcal{K}_A con la distribución \mathcal{G}_A^0

Sabemos que el retorno de ciertas regiones de interés en imágenes SAR sigue una distribución \mathcal{K}_A , la pregunta que nos formulamos es si será posible que estos datos sean ajustados con la distribución \mathcal{G}_A^0 y, si así lo fueran, con qué calidad será ese ajuste.

Además de verificar la calidad de este ajuste, las experiencias mostradas en esta sección también permitirán observar que los valores de α_G estimados están cercanos al valor $-\alpha_K$.

Conceptualmente, en esta sección nos pondremos en la situación del usuario que dispone para realizar el análisis de imágenes SAR únicamente de la distribución \mathcal{G}_A^0 . Veremos si ese usuario será capaz de ajustar datos que provienen de la distribución \mathcal{K}_A pero que, por imposibilidad o por ignorancia, él trata de modelarlos con la distribución \mathcal{G}_A^0 . De esta manera, la estructura de la experiencia consistirá en generar observaciones provenientes de distribuciones \mathcal{K}_A , ajustar los datos con distribuciones \mathcal{G}_A^0 , y en medir la calidad de ese ajuste a través del test de adherencia χ^2 de Pearson

El objetivo de este reemplazo, si fuera posible realizarlo, es utilizar únicamente distribuciones \mathcal{G}_A^0 para el análisis de imágenes SAR, debido a las ventajas analíticas y computacionales que ofrecen en relación a las distribuciones \mathcal{K}_A .

Para cuantificar la calidad de este procedimiento aquí propuesto se generarán muestras de diferentes tamaños con distribución \mathcal{K}_A con diferentes parámetros. Utilizando estas muestras,

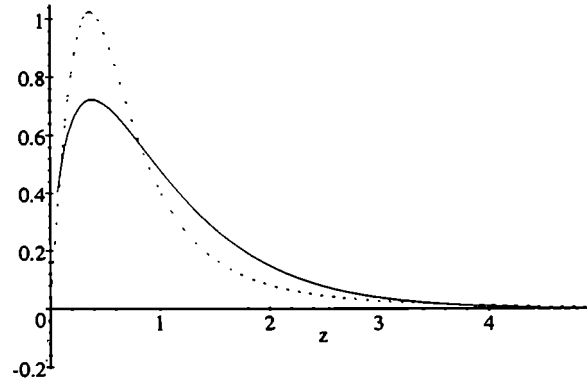


Figura 6-4: Densidades $\mathcal{K}_A(1, 2.95, 0.6)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A^0(-1, 4.52, 0.4)$ (punteada)

y suponiendo que los datos provienen de distribuciones \mathcal{G}_A^0 , se estimarán los parámetros de esta última distribución. Para cada muestra y cada distribución \mathcal{G}_A^0 ajustada se verá si las distribuciones con estos parámetros estimados ajustan bien los datos de cada muestra, es decir, se observarán cuántas muestras son rechazadas a un determinado nivel de confianza. El porcentaje de muestras rechazadas, suponiendo el modelo \mathcal{G}_A^0 , será comparado con el porcentaje de muestras rechazadas cuando la hipótesis de la distribución de la cual provienen estas muestras es la distribución \mathcal{K}_A , con parámetros estimados a partir de dichas muestras.

La utilización del test de adherencia χ^2 se debe a que éste es el test más utilizado en la aplicaciones de análisis de imágenes, y a que nos permitirá también dar una justificación de la elección de la distancia L_2 dada por la ecuación (6.1), que se utilizó para minimizar la distancia entre las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 .

Con este propósito veamos, primero, la siguiente

Definición 51 *El estadístico χ^2 de Pearson es:*

$$t_{\chi^2} = \sum_{i=0}^k \frac{(h_i - mp_i)^2}{mp_i} \quad (6.21)$$

donde

m : número total de datos simulados distribuidos $\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)$

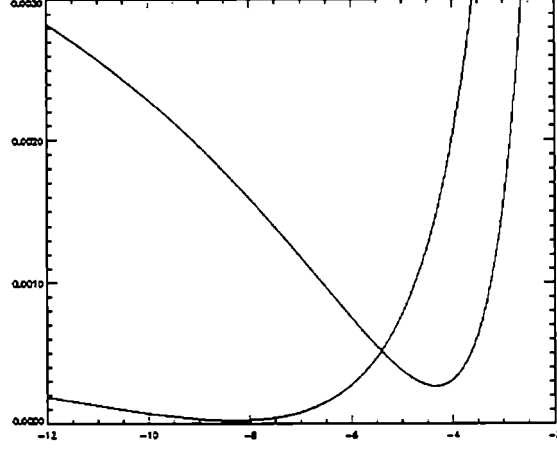


Figura 6-5: Distancia entre las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 en función del parámetro α_G . Se consideraron dos casos: $\alpha_K = 4$ (sólida) y $\alpha_K = 8$ (punteada).

h_i : número de datos observados en cada intervalo

k : número de intervalos

p_i : $F(z_i) - F(z_{i-1})$, (F distribución acumulada)

Construiremos el estadístico χ^2 bajo la hipótesis de que la distribución \mathcal{G}_A^0 es el modelo de ajuste para datos que, tal como antes mencionado, obedecen la distribución K_A . Generamos, entonces, una secuencia de valores z_{A_i} , $1 \leq i \leq m$, que son realizaciones de variables aleatorias independientes con distribución $K_A(\alpha_K, \lambda^*, n)$, para un valor del parámetro α_K determinado y el parámetro λ^* definido como en (6.2), sin pérdida de generalidad por ser λ un parámetro de escala. A partir de esta muestra se estiman los parámetros α_G y γ de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)$ usando el método de máxima verosimilitud y momentos de orden 1/2 visto en la sección 4.3 del Capítulo 4. Se evalúa la calidad del ajuste através del p -valor del test χ^2 .

Ahora bien, para hallar los valores p_i recordemos que si la variable aleatoria Z está distribuída según $\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)$ entonces su función de distribución acumulada puede ser evaluada através de la relación:

$$F_{Z_A}(z) = \Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\alpha z^2/\gamma),$$

donde $\Upsilon_{\tau, \nu}$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria distribuída $\mathcal{F}_{\tau, \nu}$ de

Snedecor, ver Capítulo 3. Entonces podemos calcular p_i bajo la hipótesis de que la distribución \mathcal{G}_A^0 es la distribución de ajuste, de la siguiente manera:

$$F(z_i) - F(z_{i-1}) = \Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\frac{\alpha}{\gamma} z_i^2) - \Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\frac{\alpha}{\gamma} z_{i-1}^2) \text{ para } 1 \leq i \leq k,$$

luego, reemplazando en la ecuación (6.21), obtenemos que el estadístico χ^2 tiene la siguiente fórmula:

$$t_{\chi^2} = \sum_{i=1}^k \frac{\left(h_i - m \left(\Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\frac{\alpha}{\gamma} z_i^2) - \Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\frac{\alpha}{\gamma} z_{i-1}^2) \right) \right)^2}{m \left(\Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\frac{\alpha}{\gamma} z_i^2) - \Upsilon_{2n, -2\alpha}(-\frac{\alpha}{\gamma} z_{i-1}^2) \right)}.$$

Más detalladamente, la estructura general de la experiencia Monte Carlo es la siguiente: para un número de replicaciones R se realizan los siguientes pasos

1. Para cada $\alpha_K \in [4, 12]$ se generan muestras de la distribución \mathcal{K}_A , con λ^* y $n = 1$.
2. A partir de cada una de estas muestras de la distribución \mathcal{K}_A se estiman el parámetro de rugosidad α_G y el parámetro de escala γ de la distribución \mathcal{G}_A^0 .
3. Se evalúa la calidad de ajuste através del p -valor del test χ^2 .

Las muestras de la distribución \mathcal{K}_A fueron generadas para valores de $\alpha_K \in [4, 12]$, con tamaños $T = 1000, 10000$. El número de replicaciones R , dependiendo del tamaño de la muestra, varió entre 100 y 10000. El nivel de confianza utilizado para el test de adherencia χ^2 fue de 0.01.

Una vez colectados los datos, se procede al análisis de los mismos através de procedimientos usuales, ver [BF92b] y [BF92a]).

La aplicación que más nos interesa es la clasificación, donde se cuenta con muestras relativamente grandes. Por otro lado, para el filtrado de imágenes donde las muestras pueden ser tan chicas como de tamaño 5, de constatarse el buen ajuste para muestras grandes estará anticipado el buen ajuste para muestras pequeñas. No se realizaron experiencias para muestras muy pequeñas por ser redundante las conclusiones obtenidas para muestras grandes, y por la gran inestabilidad numérica que esta situación exhibe. La menor muestra considerada es de 100

observaciones y, en la práctica, se utilizan muestras de este orden también para filtrado (como sería el caso de una ventana de 10×10 pixels).

El nivel utilizado para el test es de 1%, por ser un nivel bastante utilizado en la práctica ([YFS⁺93]), aunque también se muestra una tabla con niveles de confianza del 5% y 10%.

Para ilustrar el procedimiento, veámoslo para $\alpha_K = 4$. En la tabla 6.5 se muestra, para distintos valores de replicaciones $R = 100, 1000, 10000$ y para cada tamaño $T = 1000, 10000$ de la muestra, los valores $\overline{\alpha_G}$ que corresponden, en cada caso, al valor medio de los R valores estimados del parámetro α_G . Se muestra también el porcentaje de muestras rechazadas al nivel de confianza del 1% (esta proporción es denotada r_G).

Se puede observar que entre 10000 muestras de tamaño 1000 se rechazaron solamente 100 muestras, obviamente cuanto mayor es el tamaño de la muestra mayor es la cantidad de muestras rechazadas, aún así se considera que rechazar el 12% de 10000 muestras de tamaño 10000 no indicaría que habría que rechazar la hipótesis de que la distribución \mathcal{G}_A^0 es un buen modelo de ajuste. Esto queda en evidencia puesto que, como se ve en la tabla 6.7, el valor de r_G nos indica cual es el porcentaje de muestras rechazadas en los distintos niveles de confianza (1%, 5% y 10%) cuando se utiliza para el ajuste de los datos la distribución \mathcal{G}_A^0 . Pero si también consideramos los porcentajes de las muestras rechazadas (r_K), para esos mismos niveles de confianza, cuando se utiliza el modelo de ajuste de la distribución \mathcal{K}_A con los parámetros α_K y λ estimados de las muestras, vemos que los valores de r_K son del orden de los r_G . Esto nos indica que si se rechaza la hipótesis de que la distribución \mathcal{G}_A^0 es el modelo de ajuste, también es rechazada la hipótesis de que la distribución \mathcal{K}_A es el modelo de ajuste. Esto indica que no hay motivo para suponer que las distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 son distintas al nivel de significancia propuesto y por lo tanto, podemos suponer que los datos provenientes de imágenes SAR tienen distribución \mathcal{G}_A^0 .

La tabla 6.6 muestra que para cada uno de los valores de $\alpha_K = 5, 6, \dots, 11$ se generaron 1000 muestras de tamaño 10000 con distribución \mathcal{K}_A . Para cada una de estas muestras se estimó el valor del parámetro α_G y se calculó el valor medio de estos valores estimados, que aparecen en la columna $\overline{\alpha_G}$. En la última columna, r_G da los porcentajes de las muestras rechazadas a un nivel del 1%. Se puede apreciar que cuanto mayor es el valor de α_K menor es el número de muestras rechazadas. Las figuras 6-6 y 6-7 muestran los histogramas de los valores estimados de los parámetros α_G para las 1000 muestras, para los casos particulares $\alpha_K = 4$ y $\alpha_K = 8$,

$\alpha_K = 4, n = 1$			%
R	T	$\widehat{\alpha}_G$	r (al 1%)
100	10000	-4.50	11.0
1000	1000	-4.78	1.5
1000	10000	-4.53	10.0
10000	1000	-4.79	1.3
10000	10000	-4.52	12.0

Tabla 6.5: Para α_K fijo, para R número de replicaciones y T número de muestra, se observa el promedio de los valores estimados de α_G y el porcentaje de muestras rechazadas en cada caso

respectivamente y se puede observar, en cada caso, que los valores medios de los $\widehat{\alpha}_G$ caen dentro de un entorno de $-\alpha_K$.

Por último veamos el por qué de la elección de la distancia L_2 . Una buena razón para justificar esta elección es que la distancia χ^2 es la versión discreta y finita de la distancia L_2 . Por otro lado, observemos los resultados obtenidos al calcular la distancia L_2 entre la densidad de la distribución \mathcal{K}_A y la densidad de la distribución \mathcal{G}_A^0 correspondiente a la minimización de esta distancia, como se ve en la última columna de la tabla 6.4. Estos valores son los que corresponderían asintóticamente al estadístico del test χ^2 realizado para testear la hipótesis de que los datos con distribución \mathcal{K}_A pueden ser ajustados con la distribución \mathcal{G}_A^0 . La pregunta que nos hacemos es cuál debería ser el tamaño de la muestra a ser considerada para que el test χ^2 no rechace la hipótesis al nivel de confianza considerado. Pero observando los valores tabulados del estadístico χ^2 , éstos muestran que no hay ningún tamaño de muestras, para el nivel de confianza considerado, donde sean menores que el valor de la integral que se calculó en la minimización de la distancia L_2 , es decir para ningún tamaño de muestra se rechaza la hipótesis.

6.7 Otro criterio de correspondencia

En esta sección se efectuará una correspondencia entre los parámetros (α_K, λ) y (α_G, γ) utilizando los momentos de primer y segundo orden de cada distribución. Se verá que es posible obtener esta correspondencia fácilmente, pero que este método no puede mejorar el método de minimización de la distancia L^2 definida en (6.1). Aún así, este procedimiento nos servirá como una aproximación, no tan fina como la aproximación en L^2 , la que nos dará información,

$R = 1000, T = 10000, n = 1$		
α_K	$\widehat{\alpha}_G$	r_G (al 1%)
5.	-5.53	3.4
6.	-6.55	2.2
7.	-7.61	1.0
8.	-8.73	1.1
9.	-9.69	1.3
10.	-10.83	0.7
11.	-11.98	0.7

Tabla 6.6: Para cada valor de α_K se estimo el valor medio de los α_G estimados correspondiente a $R=1000$ muestras de tamaño $T=10000$, para 1 look,

$\alpha_K = 4, T = 1000, R = 1100$		
nivel de confianza	r_G	r_K
1%	2.7	1.8
5%	7.5	5.3
10%	11.8	10.6

Tabla 6.7: Para tres niveles de confianza, se muestra el porcentaje de muestras rechazadas cuando el ajuste se hace con la distribucion K o con la distribucion G

de una manera rápida y sencilla, sobre cuál es rango de variación de los parámetros (α_G, γ) correspondientes cuando se fija los valores de los parámetros (α_K, λ) .

Dados (α_K, λ) fijos y $n = 1$ parámetros de la distribución \mathcal{K}_A , vamos a calcular cuáles son los parámetros (α_G, γ) de la distribución \mathcal{G}_A^0 que se obtienen si se igualan los momentos de orden 1 y 2 (ver Capítulo 3) de ambas distribuciones. Recordemos que los momentos de orden 1 y 2 de la distribución \mathcal{K}_A están definidos como:

$$m_{1\mathcal{K}_A} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_K + 1/2)}{2\lambda^{1/2}\Gamma(\alpha_K)} \text{ y } m_{2\mathcal{K}_A} = \frac{\Gamma(\alpha_K + 1)}{\lambda\Gamma(\alpha_K)}, \text{ para } \alpha, \lambda, n > 0,$$

y los momentos de orden 1 y 2 de la distribución \mathcal{G}_A^0 son:

$$m_{1\mathcal{G}_A^0} = \frac{\sqrt{\pi}\gamma^{1/2}\Gamma(-\alpha_G - 1/2)}{2\Gamma(-\alpha_G)} \text{ y } m_{2\mathcal{G}_A^0} = \frac{\gamma\Gamma(-\alpha_G - 1)}{\Gamma(-\alpha_G)}, \text{ para } -\alpha, \gamma, n > 0.$$

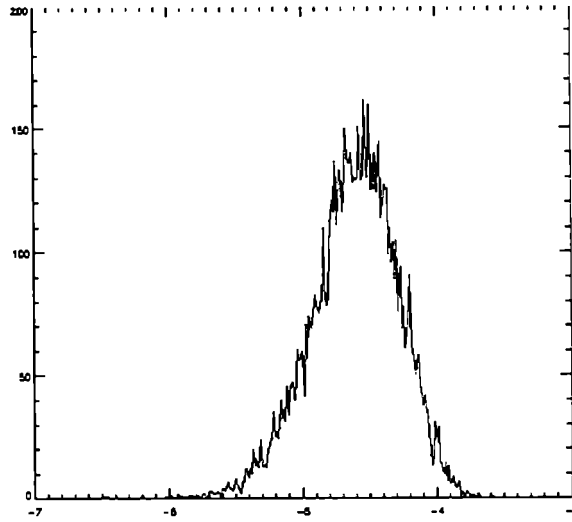


Figura 6-6:

Igualando $m_{1\kappa_A}$ a $m_{1g_A^0}$ y $m_{2\kappa_A}$ a $m_{2g_A^0}$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \gamma^{1/2} \frac{\Gamma(-\alpha_G - 1/2)}{\Gamma(-\alpha_G)} = \frac{\Gamma(\alpha_K + 1/2)}{\lambda^{1/2} \Gamma(\alpha_K)} \\ \gamma = \frac{1}{\lambda} \alpha_K (-\alpha_G - 1) \end{cases}.$$

Luego, reemplazando el valor de γ en la primera ecuación tenemos

$$\frac{(-\alpha_G - 1)^{1/2} \Gamma(-\alpha_G - 1/2)}{\Gamma(-\alpha_G)} = \frac{\Gamma(\alpha_K + 1/2)}{\alpha_K^{1/2} \Gamma(\alpha_K)},$$

entonces, una solución sería

$$-\alpha_G = \alpha_K + 1 \text{ y } \gamma = \frac{1}{\lambda} \alpha_K^2. \quad (6.22)$$

En la tabla 6.8 se muestran para los valores de $\alpha_K \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y de λ de tal manera que la media sea unitaria, los valores de α_G y γ hallados según la relación (6.22).

En las columnas $dm12$ y $dmin$ de esta tabla se presentan las distancias L_2 entre ambas densidades utilizando el par $(\alpha_{G_{12}}, \gamma_{12})$ obtenido por el método de igualación de los momentos y el par $(\alpha_{G_{min}}, \gamma_{min})$ por el método de minimización de la distancia L_2 . Haciendo una comparación

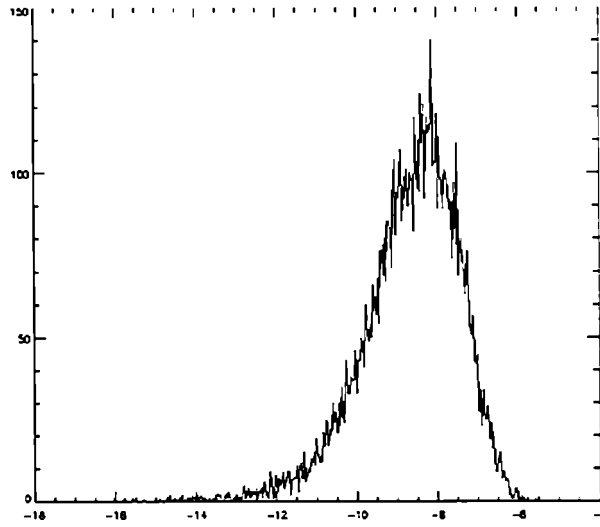


Figura 6-7: Histograma correspondiente a los valores estimados de α_G para 1000 muestras con distribución K_A para $\alpha_K = 8$

entre estos resultados y los que se muestran en la tabla 6.4, vemos que la aproximación entre distribuciones hecha mediante la minimización de la distancia L_2 es superior a la efectuada con el método de igualación de los momentos.

Por último podemos concluir, por todo lo visto en este capítulo, que podemos substituir el modelo clásico $\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)$, con el que se han tratado hasta el momento los datos SAR, por la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)$.

En el próximo capítulo se verá, mediante aplicaciones a imágenes simuladas y reales que podemos adoptar este modelo como el verdadero.

α_K	λ	$\alpha_{G_{12}}$	γ_{12}	$\alpha_{G_{\min}}$	γ_{\min}	$dm12$	$dmin$
4	2.95	-5	5.42	-4.29	4.53	$6.707 \cdot 10^{-2}$	$2.48180 \cdot 10^{-4}$
5	3.73	-6	6.70	-5.32	5.42	$8.702 \cdot 10^{-2}$	$1.12991 \cdot 10^{-5}$
6	4.52	-7	7.96	-6.50	6.69	$1.0378 \cdot 10^{-1}$	$6.79934 \cdot 10^{-5}$
7	5.30	-8	9.25	-7.29	7.96	$1.1692 \cdot 10^{-1}$	$3.96089 \cdot 10^{-5}$
8	6.09	-9	10.50	-8.28	9.23	$1.2895 \cdot 10^{-1}$	$2.46307 \cdot 10^{-5}$

Tabla 6.8: parámetros de la distribución GA0 calculados usando primer y segundo momentos de las distribuciones KA y GA0

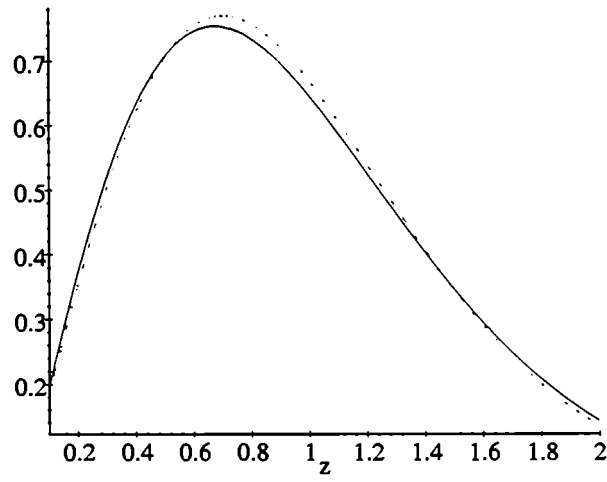


Figura 6-8: Curvas correspondientes a las densidades $\mathcal{K}_A(4, 2.95, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A(-5, 5.422, 1)$ (punteada).

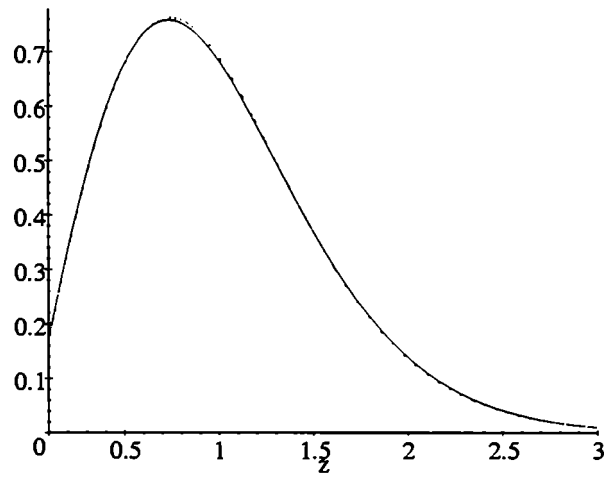


Figura 6-9: Curvas correspondientes a las densidades $\mathcal{K}_A(8, 6.09, 1)$ (sólida) y $\mathcal{G}_A(-9, 10.5, 1)$ (punteada).

Capítulo 7

Resultados de aplicaciones

Como ya se ha visto a lo largo de esta tesis el modelo de la distribución \mathcal{G}_A^0 es el que se propone para modelar los datos SAR en reemplazo de la distribución \mathcal{K}_A . El procesamiento de imágenes SAR requerido para la utilización de estos datos en diferentes aplicaciones involucra el filtrado, la segmentación y la clasificación de estas imágenes. Por este motivo se mostrará en este capítulo el impacto que tiene el cambio de modelo propuesto, concretamente en la clasificación.

Se clasificará una imagen real con áreas que posean diferentes grados de homogeneidad. Sabiendo que los datos están distribuidos según la ley \mathcal{K}_A se supondrá que estos siguen el modelo de la distribución \mathcal{G}_A^0 . Es decir, que se clasificará la imagen teniendo en cuenta este último modelo, donde los datos provenientes de las áreas de entrenamiento serán ajustadas según la distribución \mathcal{G}_A^0 . Se comparará entonces, el comportamiento de la clasificación obtenida cuando se utiliza la distribución \mathcal{G}_A^0 con la realizada bajo el modelo de la distribución \mathcal{K}_A .

Para los dos modelos propuestos se utilizarán imágenes SAR conteniendo áreas de diferentes grados de homogeneidad provenientes de diferentes sensores y con diferente número de looks.

Como otro resultado importante de aplicación se clasificarán imágenes SAR, reales y simuladas, utilizando las dos bandas de características generadas a partir de la estimación de los parámetros de la distribución \mathcal{G}_A^0 , α y γ , respectivamente. Se comprobará que el comportamiento de esta clasificación es superior a la clasificación espacial realizada cuando se considera solamente como entrada la imagen que corresponde al retorno.

7.1 Clasificación de imágenes SAR

En una subimagen de 400×400 *pixels* de una imagen proveniente del satélite JERS-1, órbita/punto D405/306, en amplitud, con número equivalente de looks estimado 2.95, espaciamiento entre *pixels* de 12.5×12.5 m., banda L, polarización HH, del 26 de junio de 1993, de tamaño 1600×2400 *pixels* de la región de la Floresta Nacional de Tapajós, Pará, Brasil, que se observa en la figura 7-1, se implementaron clasificaciones utilizando como modelo a las distribuciones $\Gamma^{1/2}$, \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 . Al realizar la clasificación se vio que, bajo la hipótesis de que los datos siguen el modelo de la distribución \mathcal{G}_A^0 , ésta no empeora cuando se toman como modelos a las distribuciones $\Gamma^{1/2}$ o \mathcal{K}_A , ya sea que los datos provengan de áreas homogéneas o heterogéneas. La



Figura 7-1: Imagen JERS-1 de la zona de Tapajos (Brasil) de 3 looks

clasificación se realizó usando dos clasificadores: el de Máxima Verosimilitud y el clasificador contextual Iterated Conditional Modes (ICM).

El clasificador de Máxima Verosimilitud es una técnica de clasificación supervisada ampliamente utilizada en datos de sensoramiento remoto ver [Ric86]. Esta técnica consiste, una vez seleccionadas las áreas de entrenamiento para cada clase elegida, en asociar una distribución a cada clase, estimar los parámetros correspondientes a cada distribución y clasificar la imagen

haciendo corresponder a cada pixel de la imagen la clase con mayor probabilidad. Es decir, que este criterio maximiza una función que solamente depende del valor del pixel observado y de la función de densidad elegida para cada clase..

El clasificador contextual Iterated Conditional Modes (ICM) ver [Bes89], es un método iterativo de refinamiento de clasificaciones que consiste en substituir la clase asociada a cada coordenada por la clase que maximiza un cierto criterio. Ese criterio consiste en una distribución a posteriori de la clase, dado el valor del pixel (componente de máxima verosimilitud) y las clases de los *pixels* vecinos (componente contextual). La influencia de las clases vecinas es cuantificada por un parámetro real, que se estima iterativamente, según el modelo de distribución espacial de la clase. Se consideró un sistema de 8-vecino para cada clasificar cada *pixel*. Se consideraron tres clases bien diferenciadas, a saber, corte (C: rojo), corte con regeneración (CCR: azul) y selva (S: verde). Las regiones de entrenamiento fueron tomadas como se indica en la figura 7-2, siendo las dos primeras más homogéneas que la clase selva.

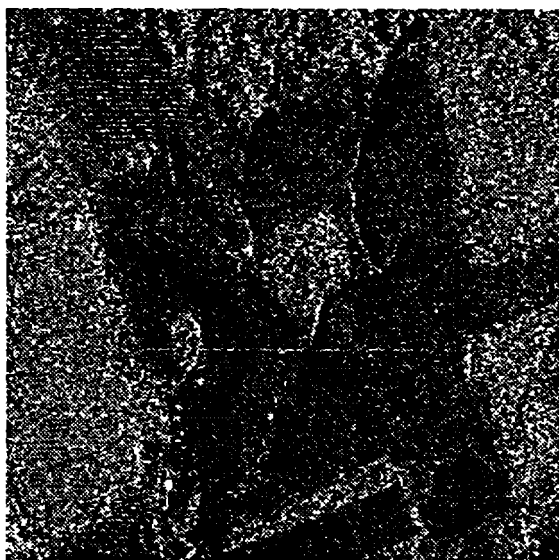


Figura 7-2: Imagen JERS-1 con zonas de entrenamiento correspondientes a: corte (rojo), corte con regeneración (azul) y selva (verde)

7.1.1 Clasificación usando los modelos $\Gamma^{1/2}$, \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0

En primera instancia, para ambos clasificadores, antes mencionados, se consideró a la distribución $\Gamma^{1/2}$ como la que ajusta mejor esos datos. Luego, del mismo modo, se consideraron los casos en que los datos fueron ajustados por la distribuciones \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 , tomando cada situación como el modelo verdadero. Bajo cada una de estas hipótesis se llevó a cabo las clasificaciones con los métodos antes mencionados y se calculó la matriz de confusión para poder hacer una comparación entre los tres modelos.

El primer caso que se consideró fue el suponer que los datos de las áreas de entrenamiento para las tres clases propuestas segúan el modelo $\Gamma^{1/2}$. En las figuras 7-3 y 7-4 se observan las imágenes clasificadas por los métodos de máxima verosimilitud e ICM, obviamente el último método dá mejores resultados, por lo que se consideró, para la comparación con los otros modelos, solamente ICM.

En la tabla (7.1) se muestra la matriz de confusión obtenida luego de la clasificación de la imagen JERS-1 con el método ICM y cuando el modelo de ajuste de los datos utilizado es $\Gamma^{1/2}$. Se muestra también en la misma tabla la precisión con que fue llevada a cabo dicha clasificación y el coeficiente Kappa correspondiente. Sus valores miden el porcentaje de los pixels que fueron clasificados en cada clase. En la tabla (7.2) podemos ver los porcentajes de los errores por comisión y omisión de dicha clasificación.

En las figuras 7-5 y 7-6, se muestran las clasificaciones de la imagen JERS-1 por los métodos de máxima verosimilitud e ICM, respectivamente, cuando se consideró a la distribución \mathcal{K}_A como el verdadero modelo de ajuste y en las figuras 7-7 y 7-8, cuando la distribución \mathcal{G}_A^0 fue considerada como el verdadero el modelo de ajuste a los datos, para los dos métodos de clasificación. A simple vista, y en los tres casos, $\Gamma^{1/2}$, \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 , se puede notar que el método ICM es superior al método de clasificación por máxima verosimilitud. Este hecho está cuantificado en las matrices de confusión, como se puede ver en las tablas (7.1), (7.2), (7.3), (7.4), (7.5) y (7.6) y además, podemos concluir que tomar conio modelo verdadero a la distribución \mathcal{G}_A^0 no empeora la clasificación.

Precisión = 85.80%			
Coeficiente Kappa =0.8084			
Resultado/ Verdadero	C	CCR	S
C	39.054	1.740	2.755
CCR	0.187	40.317	1.692
S	1.007	6.820	6.430

Tabla 7.1: Matriz de Confusión de la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste raíz cuadrada de Gamma y el método ICM

Clase	Comisión (%)	Omisión (%)	Presición (%)
C	11.167	2.964	97.036
CCR	3.843	17.513	82.487
S	71.959	40.886	59.114

Tabla 7.2: Porcentaje de errores por comisión y omisión en la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste raíz cuadrada de Gamma y el método ICM

Precisión = 88.0347%			
Coeficiente Kappa = 0.8387			
Resultado/Verdadero	C	CCR	S
C	38.907	1.232	2.460
CCR	0.234	43.119	2.408
S	1.106	4.525	6.009

Tabla 7.3: Matriz de Confusión de la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste KA y el método ICM

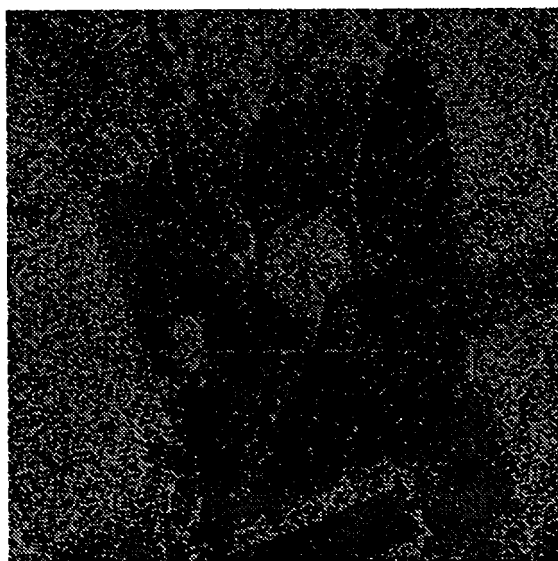


Figura 7-3: Imagen clasificada con el método de máxima verosimilitud, bajo el modelo $\Gamma^{1/2}$

Clase	Comisión (%)	Omisión (%)	Presición (%)
C	9.173	3.331	96.669
CCR	5.406	11.779	88.221
S	51.775	44.755	55.245

Tabla 7.4: Porcentaje de errores cometidos y omitidos en la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste KA y el método ICM

En las figuras 7-9, 7-11 y 7-10 se muestran los gráficos de los datos de cada región de entrenamiento correspondientes a cada clase y la curva de ajuste para los dos modelos \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 , y en las tablas (7.7), (7.9) y (7.8), el análisis descriptivo de las mismas. Se puede observar que las clases corte y corte con regeneración corresponden a áreas más homogéneas que la clase selva que corresponde a un área más heterogénea que las anteriores.

Precisión = 88.1388%			
Coeficiente Kappa = 0.8402			
Resultado/Verdadero	C	CCR	S
C	38.885	1.228	2.416
CCR	0.234	43.223	2.430
S	1.128	4.425	6.030

Tabla 7.5: Matriz de Confusión de la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste GA0 y el método ICM

Clase	Comisión (%)	Omisión (%)	Presición (%)
C	9.055	3.385	96.615
CCR	5.450	11.566	88.434
S	51.057	44.555	55.445

Tabla 7.6: Porcentaje de errores cometidos y omitidos en la clasificación de la imagen JERS-1, bajo el modelo de ajuste GA0 y el método ICM

Clase Corte	
Número de elementos	9277
Valor Mínimo	9
Valor Máximo	201
Primer Cuartil	47
Mediana	59
Tercer Cuartil	72
Media	60
Varianza	384.35
Coeficiente de Variación	0.323
Skewness	0.70
Kurtosis	1.41

Tabla 7.7: Análisis descriptivo de la clase corte

Clase Corte con Regeneación	
Número de elementos	2597
Valor Mínimo	22
Valor Máximo	243
Primer Cuartil	70
Mediana	89
Tercer Cuartil	107
Media	90.53
Varianza	885.23
Coeficiente de Variación	0.33
Skewness	0.60
Kurtosis	0.98

Tabla 7.8: Análisis descriptivo de la clase corte con regeneración



Figura 7-4: Imagen JERS-1 clasificada con el método ICM, usando como modelo de ajuste a la distribución $\Gamma^{1/2}$

7.2 Aplicación de la estimación de los parámetros α y γ a imágenes simuladas y reales.

Una de las más importantes características de la distribución \mathcal{G}_A^0 es que los valores estimados del parámetro tienen una interpretación inmediata en términos de su rugosidad. Para valores de α cercanos a cero, el área de la imagen presenta valores de grises muy heterogéneos (coeficiente de variación muy alto), como es el caso de áreas urbanas. Si consideramos áreas menos heterogéneas, como por ejemplo selva, los valores de α disminuyen, alcanzando valores más bajos en áreas homogéneas, como es el caso de los cultivos. Esta es la razón por la que el parámetro α es considerado como una medida de rugosidad o textura.

El parámetro γ de la distribución \mathcal{G}_A^0 es un parámetro de escala y está relacionado con el brillo de la imagen. Nuestra vista es más sensible a las variaciones en el valor medio que en la rugosidad es decir, es muy difícil discriminar áreas que tienen diferentes parámetros de rugosidad mientras que áreas con diferentes parámetros de escala logran diferenciarse perfectamente. El parámetro λ de la distribución \mathcal{K}_A es la contrapartida del parámetro γ de la distribución \mathcal{G}_A^0 .

Como aplicación de los Capítulos 4 y 5, se presentará en esta sección imágenes generadas con

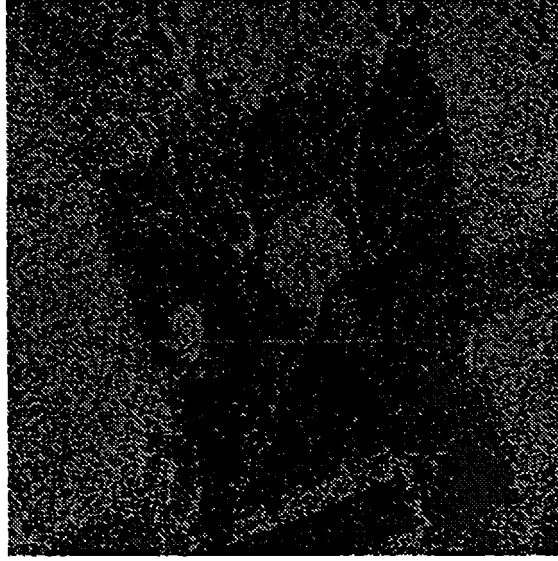


Figura 7-5: Clasificación, por el método de máxima verosimilitud, de la imagen JERS-1, bajo el modelo \mathcal{K}_A .

muestras provenientes de variables aleatorias distribuidas $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$, para diferentes valores de (α, γ, n) , que simularán regiones con diferente grado de homogeneidad, brillo y número de looks. En estos casos los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ se estimaron en forma conjunta, fijando el valor n y utilizando el estimador por el método de los momentos de orden 1 y 1/2.

Las imágenes simuladas serán usadas también para testear el rendimiento de los procedimientos de clasificación. Se verá que, utilizar las imágenes generadas localmente con las estimaciones de los parámetros α y γ , y que fueron obtenidos mediante ventanas deslizantes de un tamaño dado, lleva a una muy buena discriminación de regiones que poseen diferente grado de homogeneidad y también dentro de aquellas que tienen el mismo grado de homogeneidad pero difieren en el brillo.

Se analizarán dos casos: el primero se tratará con datos simulados utilizando los generadores adecuados que se vieron en el Capítulo 5 y el segundo presentaremos dos ejemplos con datos de imágenes SAR.



Figura 7-6: Imagen JERS-1 clasificada con el método ICM, bajo el modelo \mathcal{K}_A .

7.2.1 Análisis de Datos Simulados

Se simuló una imagen de un área con cuatro regiones de diferente grado de homogeneidad y brillo. Se consideró dos grados de homogeneidad, una región heterogénea con $\alpha = -5$ y otra extremadamente heterogénea con $\alpha = -1.5$. Para cada valor de α fueron utilizados dos valores del parámetro γ : $\gamma = 2 \cdot 10^5$ y $\gamma = 4 \cdot 10^5$, respectivamente, obteniendo así, una imagen con 4 regiones bien diferenciadas. Los resultados de esta simulación se pueden ver en la figura 7-12. Se eligió el caso $n = 1$ dado que es el caso más ruidoso de las imágenes de amplitud y por consiguiente el más difícil de clasificar. Esta imagen fue analizada dentro del contexto de máxima verosimilitud suponiendo distribución gaussiana, es decir, fueron tomadas muestras representativas de cada región para estimar la media y la varianza de distribuciones normales. Los resultados en esta etapa de entrenamiento se muestran en la tabla 7.10, media y desviación estandar de cada región y los valores originales de los parámetros α y γ con que fueron generadas cada una de las regiones. Las densidades de estas distribuciones serán utilizadas para determinar la regla de clasificación. En la figura 7-13 se muestra la imagen clasificada con el método de máxima verosimilitud, suponiendo, para cada región, distribución gaussiana con los parámetros de la tabla 7.10. Este mapa de clasificación está evidentemente dominado por la clase verde.

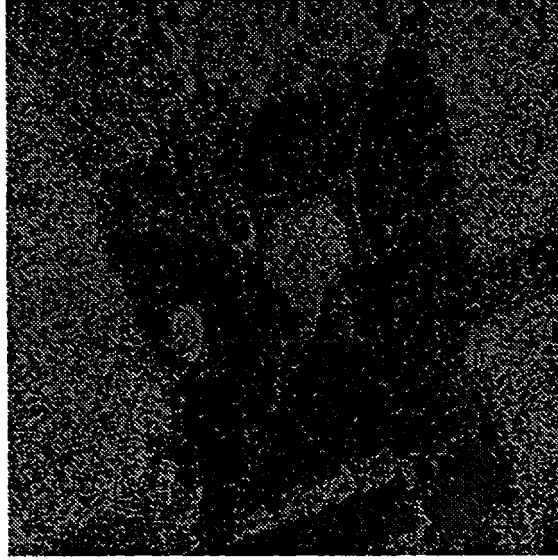


Figura 7-7: Imagen JERS-1 clasificada con el método de máxima verosimilitud, suponiendo que los datos son ajustados por la distribución \mathcal{G}_A^0 .

Por otro lado, la figura 7-14 muestra el resultado de aplicar los estimadores de orden 1 y orden 1/2 para el parámetro α y para el parámetro γ , como se vió en la sección 4.3.5 del Capítulo 4. La imagen de la izquierda corresponde a los valores estimados localmente de α , utilizando una ventana deslizante de 7×7 y la imagen de la derecha, a los valores estimados localmente del parámetro γ usando la misma metodología. Dadas las características del estimador conjunto $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})_{m1m1/2}$, habrá pixels que no podrán estimarse, ya que las ecuaciones planteadas (ver ecuación 4.32, ítem 2, sección 4.3.5, del Capítulo 4) para dicho estimador no tendrán solución. A estos pixeles que tienen valores "prohibidos" se los recalcula otra vez, aplicando el filtro de la mediana en una ventana de 11×11 . Dichos valores prohibidos ocurren en regiones muy homogéneas que corresponden a valores de α muy pequeños (muy grandes en valor absoluto), no así para zonas muy heterogéneas (parámetro α muy cercano a 0). Analizando las dos imágenes de la figura 7-14 se puede ver que el parámetro γ discrimina las cuatro regiones, mientras que el parámetro α solamente discrimina la rugosidad. Este hecho es de gran importancia cuando se está trabajando con áreas que tienen el mismo α (misma rugosidad) y distinto γ (distinto brillo), como por ejemplo dos regiones de la misma cobertura con diferente humedad. La figura 7-15 muestra el resultado de clasificar la imagen de los valores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ utilizando el método



Figura 7-8: Imagen JERS-1 clasificada con el método ICM bajo el modelo \mathcal{G}_A^0 .

de máxima verosimilitud y suponiendo normalidad en las muestras. De la matriz de confusión, que se ve en la tabla (7.1), se puede inferir que el resultado de esta clasificación fue muy bueno, en este caso, las muestras de entrenamiento fueron tomadas como verdad terrestre.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \text{Resultado} \setminus \text{Verdad} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \hline C_1 & 96.81 & 1.22 & 3.57 & 0 \\ C_2 & 0 & 93.28 & 0 & 0.43 \\ C_3 & 2.15 & 0 & 96.11 & 0 \\ C_4 & 1.04 & 5.50 & 0.32 & 99.57 \end{array} \right), \quad (7.1)$$

7.2.2 Extracción de características para la clasificación de imágenes SAR

Imagen de 3 looks

En esta sección se trabajará con la imagen JERS-1 de 3 looks (2.95 looks estimados), cuyas referencias se encuentran en la sección 7.1. Se utilizará la misma metodología que en la sección 7.2.1. Estimando localmente los parámetros α y γ de la distribución \mathcal{G}_A^0 en una ventana deslizante de

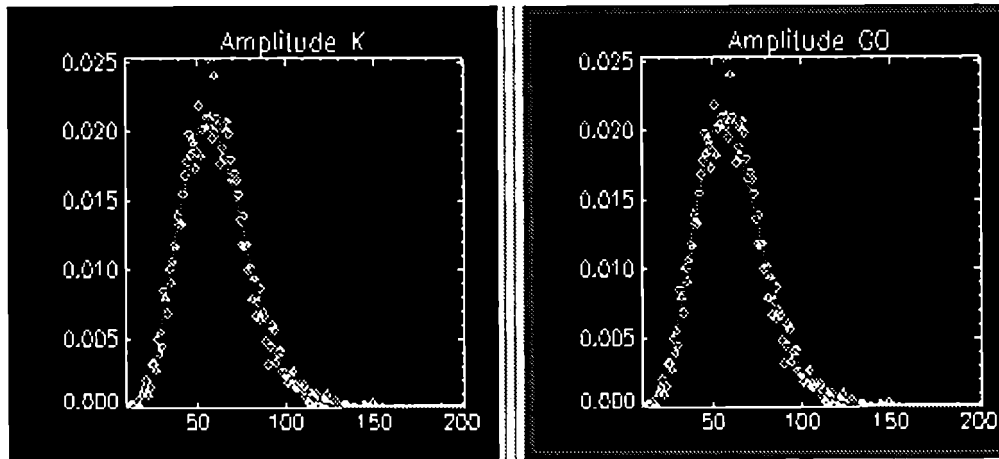


Figura 7-9: Gráfico de los datos de la clase corte, y las curvas de ajuste correspondiente a $\mathcal{K}_A(16.649, 0.0041, 2.95)$ (izquierda) y $\mathcal{G}_A^0(-19.426, 74706.26, 2.95)$ (derecha)

la imagen SAR, podemos formar otra dos imágenes que corresponderán a los valores estimados de α y γ e implementar una clasificación con el método de máxima verosimilitud. En la figura 7-16 se ven las imágenes de valores de α estimados (izquierda) y de valores γ estimados de la imagen original. Se utilizó una ventana deslizante de 7×7 para obtener los valores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ por el método de los momentos de orden 1 y $1/2$ (ver Capítulo 4), recordando que debido a las características de este estimador, podría suceder que nos encontremos con valores prohibidos, en ese caso se optó por aplicar a la imagen resultante un filtro de la mediana adaptivo. Las regiones de entrenamiento son las descritas en la sección 7.1. La imagen clasificada a partir de las imágenes obtenidas de la estimación local de α y γ , por el método de máxima verosimilitud (suponiendo gaussianidad), se muestra en la figura 7-17. La tabla 7.11 muestra la matriz de confusión, que comparando con los resultados obtenidos en la sección 7.1.1 claramente significa que la clasificación fue mejorada cuando se consideran las imágenes de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$.

Imagen real de 1 look

La figura 7-18 muestra la imagen E-SAR, obtenida con polarización HH y banda L, de la ciudad de Gilching, al oeste de Munich, Alemania. Se puede apreciar dos regiones bien diferenciadas, una correspondiente a zona de pastizal que es homogénea y otra, alrededor de ésta, correspondiente a zona urbana, extremadamente heterogénea. Utilizando estas dos clases, se implementó

Clase Selva	
Número de elementos	11266
Valor Mínimo	17
Valor Máximo	255
Primer Cuartil	89
Mediana	113
Tercer Cuartil	141
Media	116.64
Varianza	1495.60
Coefficiente de Variación	0.33
Skewness	0.53
Kurtosis	0.24

Tabla 7.9: Análisis descriptivo de la clase selva

Clases/Pmtos.	α	γ	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
verde	-5.	$2 \cdot 10^5$	193.10	115.42
negra	-5	$4 \cdot 10^5$	272.16	163.15
roja	-1.5	$2 \cdot 10^5$	444.91	405.11
azul	-1.5	$4 \cdot 10^5$	634.72	606.84

Tabla 7.10: Para cada clase se muestran la media y desviación estandar y los valores originales de los parámetros con que fueron generadas las regiones

Precisión: 94.8957%,			
Coeficiente Kappa = 0.9417			
Resultado/Verdad	C	CCR	S
C	94.441	6.561	0.007
CCR	5.564	87.490	3.532
S	0	5.999	96.461

Tabla 7.11: Matriz de confusión de la clasificación utilizando las imágenes de los parámetros estimados de rugosidad y escala de la imagen JERS-1

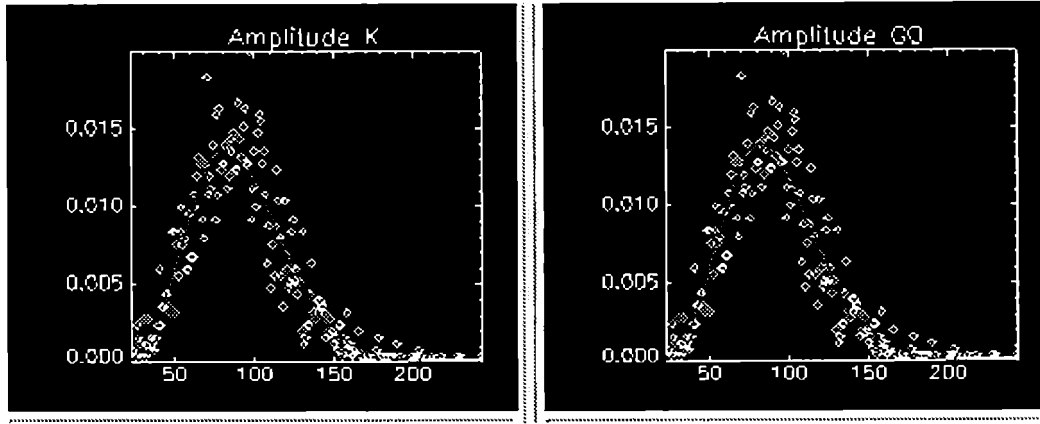


Figura 7-10: Gráfico de los datos de la clase corte con regeneración, y las curvas de ajuste correspondiente a $\mathcal{K}_A(13.764, 9080.75, 2.95)$ (izquierda) y $\mathcal{G}_A^0(-14.167, 119671.72, 2.95)$ (derecha)

Resultado/Verdadero	Pastizal	Zona Urbana
Pastizal	97.62	1.84
Zona Urbana	2.38	98.16

Tabla 7.12: Matriz de confuson de la clasificacion utilizando las imagenes estimadas de los parametros de rugosidad y escala de la imagen E-SAR

una clasificación por máxima verosimilitud, suponiendo gaussianidad en las muestras. Como resultado la clase clase urbana dominó en la imagen clasificada. En la figura 7-19 se ve las imágenes correspondientes a los parámetros estimados localmente α y γ , de la imagen original, se utilizó el mismo criterio que en la sección 7.2.1. Se puede notar que el área homogénea aparece como zona oscura en la imagen de la izquierda y como zona clara en la imagen de la derecha. Estas dos imágenes son utilizadas para la clasificación de la imagen original. La clasificación, cuyo resultado se puede ver en la figura 7-20, se realizó con el método de máxima verosimilitud suponiendo que las muestras siguen el modelo gaussiano. Se calculó la matriz de confusión, ver tabla 7.12, donde las muestras de entrenamiento fueron usadas como verdad terrestre y se puede inferir por los resultados que la clasificación fue muy buena. Los parámetros estimados para cada una de las regiones fueron: $\hat{\alpha} = -12.5$ para la región homogénea correspondiente a pastizal y $\hat{\alpha} = -1.6$ para la extremadamente heterogénea que corresponde a la zona urbana.

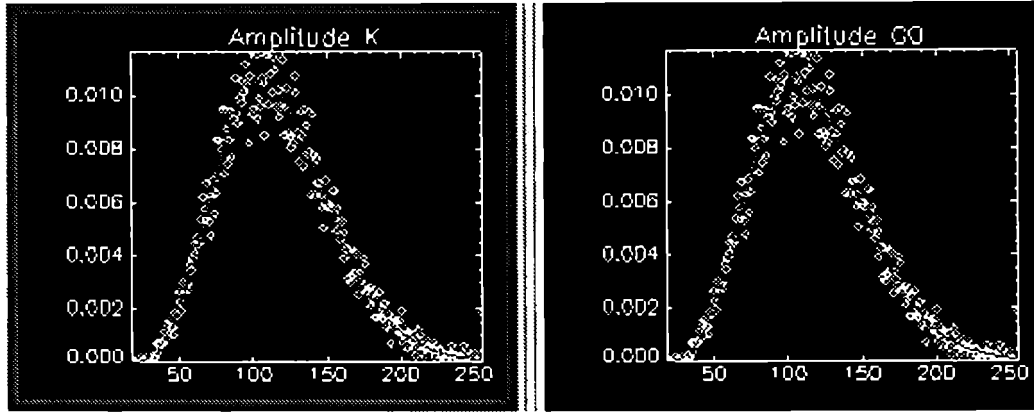


Figura 7-11: Gráfico de los datos de la clase selva, y las curvas de ajuste correspondiente a $\mathcal{K}_A(12.556, 0.00083, 2.95)$ (izquierda) y $\mathcal{G}_A^0(-12.797, 178374.07, 2.95)$ (derecha)

7.3 Conclusiones

En este capítulo se presentaron los resultados obtenidos como aplicación de los resultados teóricos que se vieron en los diferentes capítulos, a lo largo de esta tesis.

La distribución \mathcal{G}_A^0 , propuesta como el modelo que mejor ajusta los datos de imágenes SAR, fue evaluada en la clasificación de imágenes reales de diferentes looks y en imágenes sintéticas. Se compararon los resultados de estas clasificaciones con las realizadas cuando los modelos utilizados fueron \mathcal{K}_A y $\Gamma^{1/2}$. Se concluyó que el cambio de modelo no afectó los resultados de la clasificación.

Dado que la distribución \mathcal{G}_A^0 es un modelo mucho más tratable teórica y computacionalmente, y que explica mejor los datos muy heterogéneos, se estimaron localmente los parámetros de rugosidad y escala para trabajar, luego, en el espacio de las características. Estas fueron utilizadas en la clasificación de imágenes simuladas y reales y se mostró una notable mejora en los resultados obtenidos.

Concluimos este trabajo afirmando que la distribución \mathcal{G}_A^0 es el modelo que debe utilizarse para datos SAR, ya que sus parámetros nos da gran información a la que puede accederse con mucha menos dificultad que en el modelo clásico de la distribución \mathcal{K}_A y además, una de las razones fundamentales es que ésta última no es un buen modelo cuando se trata de áreas con extrema heterogeneidad, donde si lo es el modelo \mathcal{G}_A^0 .

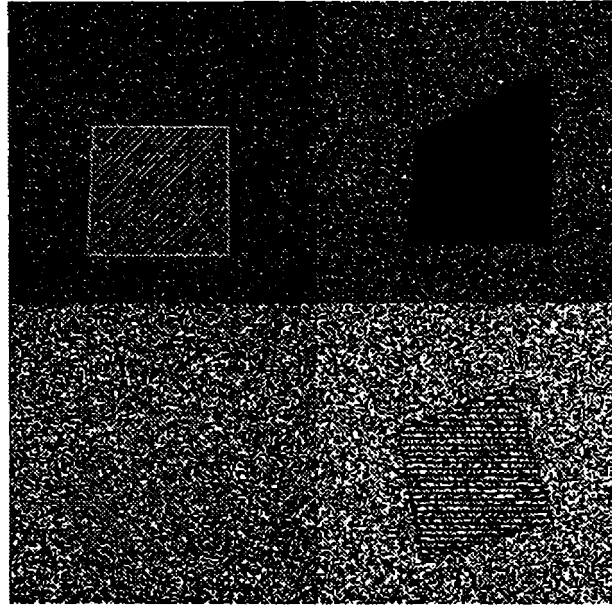


Figura 7-12: Imagen sintética con cuatro clases con distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$ (de izquierda a derecha y de arriba a abajo) a) $\alpha = -1.5$, $\gamma = 200000$, b) $\alpha = -1.5$, $\gamma = 400000$, c) $\alpha = -5$, $\gamma = 200000$, d) $\alpha = -5$, $\gamma = 400000$.

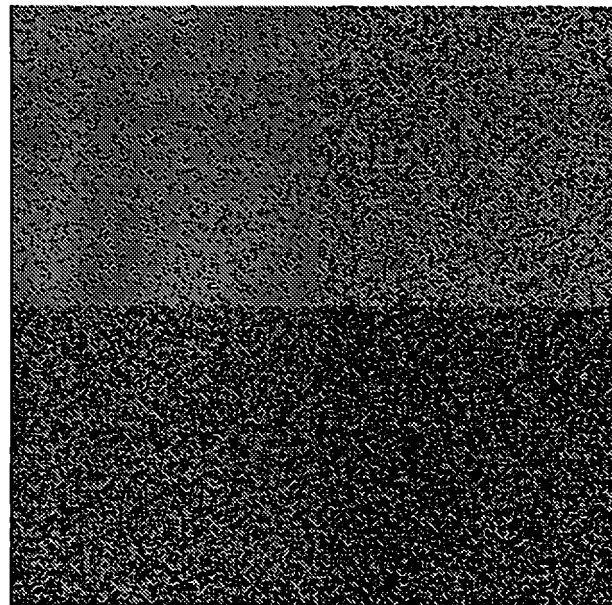


Figura 7-13: Clasificación por máxima verosimilitud de la imagen simulada

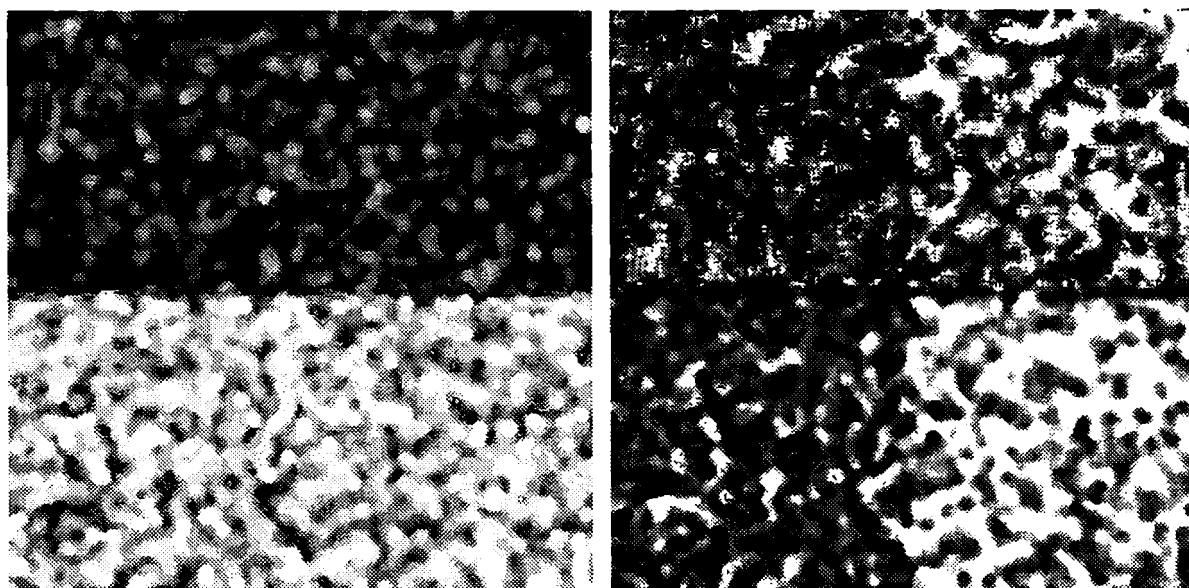


Figura 7-14: Imágenes resultantes de estimar localmente el parámetro de rugosidad (α , imagen de la izquierda) y el parámetro de escala (γ , imagen de la derecha), con ventana deslizante de 7×7 en ambos casos.

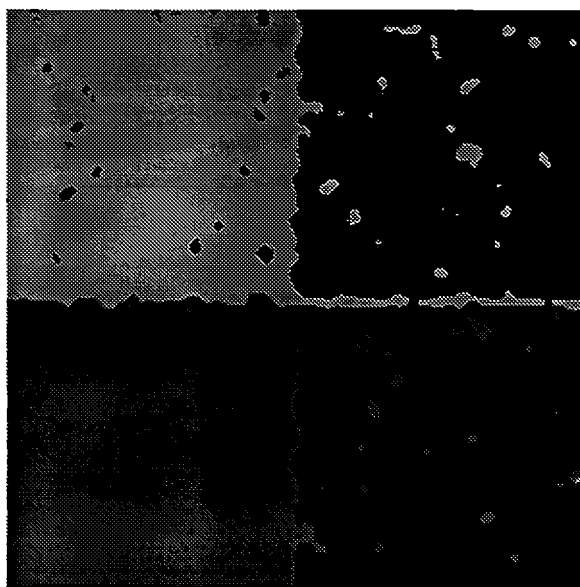


Figura 7-15: Clasificación de la imagen de parámetros (α, γ) estimados de los datos simulados, utilizando el método de Máxima Verosimilitud con distribución Gaussiana.

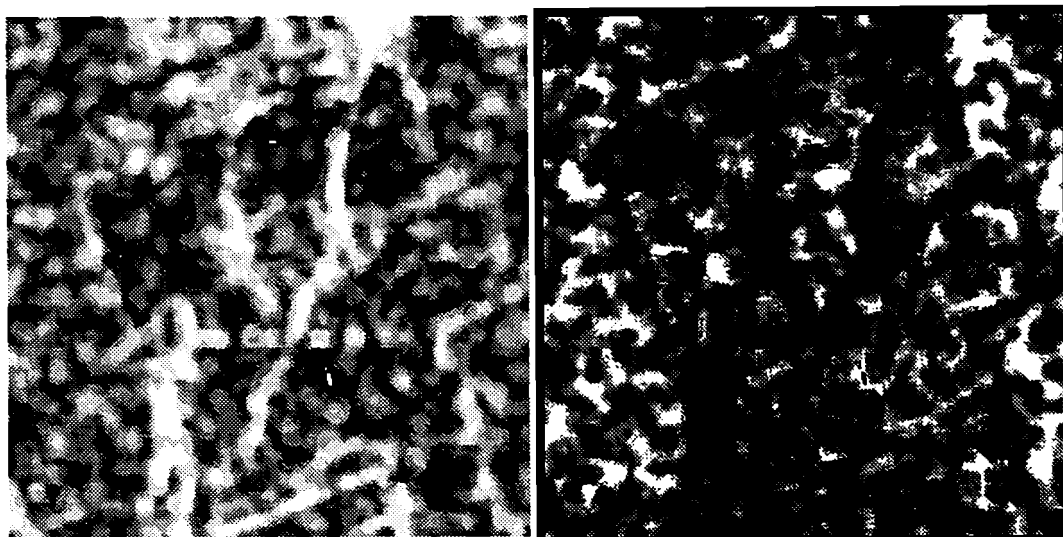


Figura 7-16: Imágenes de los parámetros estimados localmente (izquierda: rugosidad, derecha: escala) de la imagen JERS-1 de Tapajós.

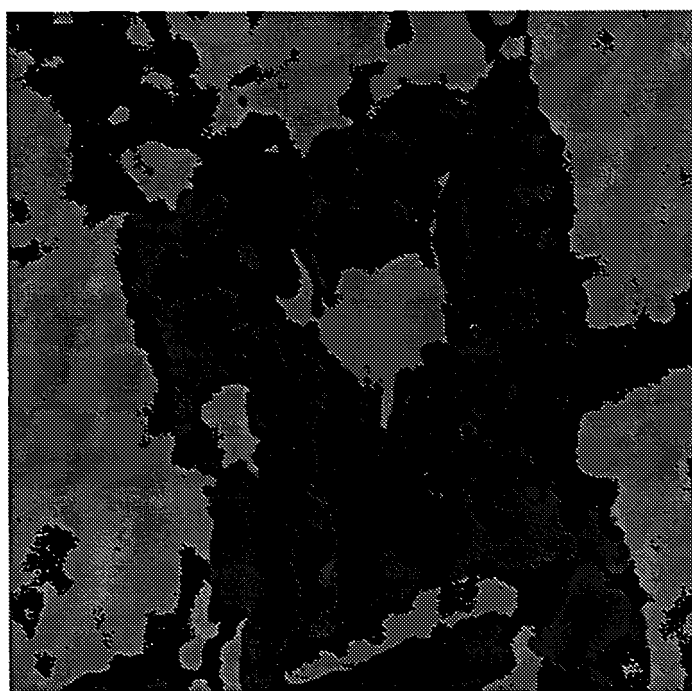


Figura 7-17: Imagen JERS-1 clasificada por el método de máxima verosimilitud, suponiendo gaussianidad en las muestras y usando las imágenes de los parámetros estimados localmente.

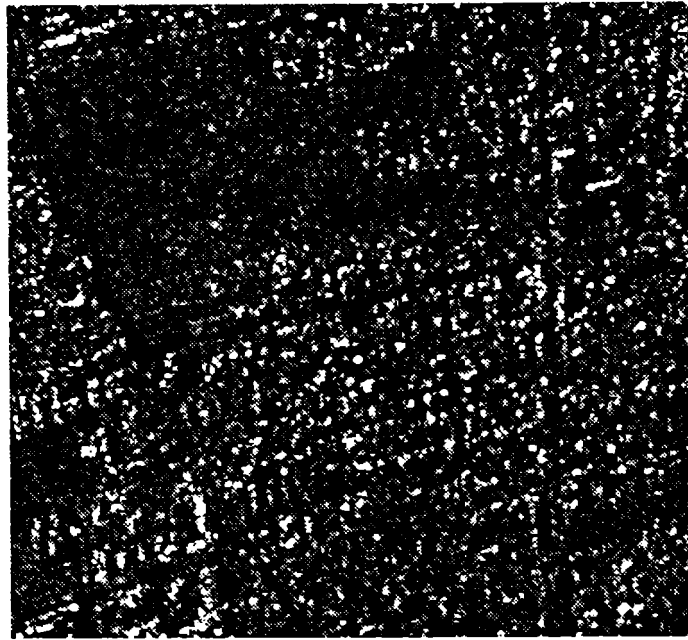


Figura 7-18: Imagen original E-SAR de Gilching.

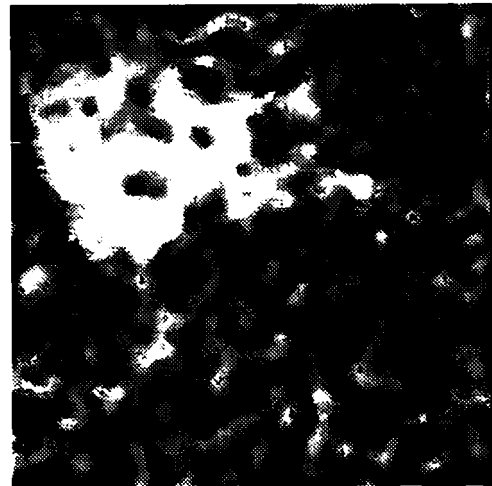
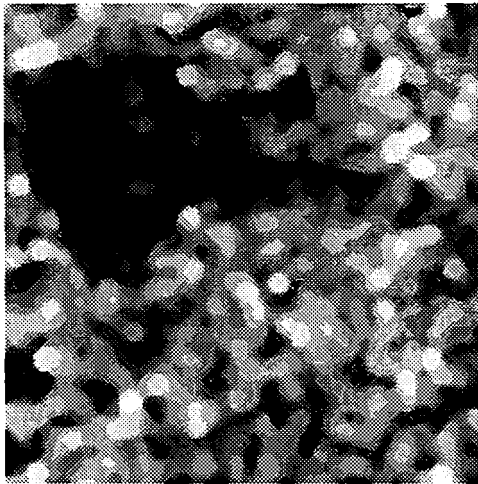


Figura 7-19: Imágenes correspondientes a la estimación local de los parámetros de rugosidad (izquierda) y de escala (derecha), obtenidos de la imagen E-SAR.

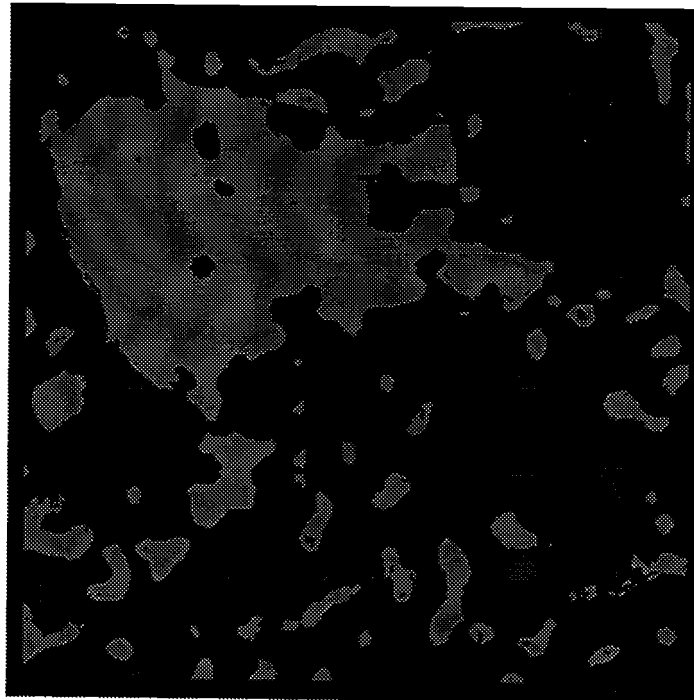


Figura 7-20: Clasificación por el método de máxima verosimilitud (suponiendo gaussianidad) de las imágenes de los parámetros estimados localmente α y γ de la imagen original E-SAR.

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajos Futuros

En este trabajo se investigó la factibilidad de utilizar el modelo \mathcal{G}_A^0 como el verdadero modelo para las imágenes SAR. Esta factibilidad fue verificada, y a continuación fue evaluado el impacto de este modelado sobre diversas etapas en el proceso de extracción de información de estas imágenes.

Esta investigación, desde los puntos de vista teórico, computacional y aplicado, nos permitió:

- mostrar las principales características de un sistema SAR, con sus ventajas y desventajas sobre otros sistemas de observación, y la importancia de la utilización de las imágenes generadas con sistemas de este tipo (Capítulo 2);
- estudiar el modelo multiplicativo y, bajo éste el comportamiento y las peculiaridades de las diferentes distribuciones que de él emergen, bien como la interpretación de sus parámetros y sus principales características y propiedades (Capítulo 3);
- estudiar, desarrollar y comparar diferentes métodos de estimación de parámetros involucrados en las distribuciones mencionadas. La comparación de estos métodos incluye aspectos computacionales y de aplicación. Mediante una experiencia de Monte Carlo verificar desde el punto de vista estadístico la validez y aplicabilidad de las mismas (Capítulo 4);
- simular variables aleatorias con distribución \mathcal{K}_A y \mathcal{G}_A^0 , para generar imágenes con áreas de distinto grado de homogeneidad y brillo. Para permitir estas simulaciones fueron implementadas y evaluadas técnicas de simulación estocástica inéditas en la plataforma

de desarrollo utilizadas para esta tesis (Capítulo 5);

- confirmar al modelo \mathcal{G}_A^0 como el mejor modelo para las imágenes SAR, logrando establecer una correspondencia entre los parámetros de ambos modelos a través de la minimización de la distancia L_2 entre ambas distribuciones (Capítulo 6);
- medir la calidad del ajuste de datos \mathcal{K}_A al ajustarlos con la distribución \mathcal{G}_A^0 , utilizando el test de adherencia χ^2 en una experiencia Monte Carlo (Capítulo 6);
- verificar que es válido, práctico, aplicable y relevante el cambio de modelo, de la distribución \mathcal{K}_A por la distribución \mathcal{G}_A^0 para la clasificación de imágenes SAR. Para esta verificación de esta hipótesis, central para la tesis, se siguieron los pasos
 1. suponer que los datos siguen el modelo \mathcal{K}_A , por un lado y por otro que el verdadero modelo es \mathcal{G}_A^0
 2. realizar clasificaciones bajo los dos supuestos
 3. hacer una comparación, que nos llevó a la conclusión que, modelar con la distribución \mathcal{G}_A^0 no empeora la clasificación de las imágenes consideradas (Capítulo 7);
- clasificar imágenes SAR, reales y simuladas, utilizando las dos bandas de características generadas a partir de la estimación de los parámetros de rugosidad y escala (α y γ respectivamente) de la distribución \mathcal{G}_A^0 . Se verificó que el comportamiento de esta clasificación es muy superior al de la clasificación espacial realizada cuando se considera solamente como entrada la imagen que corresponde al retorno (Capítulo 7).

De ésta manera, esta tesis contribuyó al cuerpo de conocimiento del análisis de imágenes de radar de apertura sintética con una poderosa herramienta de modelado: la distribución \mathcal{G}_A^0 y su utilización en la clasificación de estos datos.

Innúmeras posibilidades se abren para trabajos futuros, siendo algunas de las más importantes y viables las siguientes:

1. Extensión de los resultados obtenidos en esta tesis:
 - (a) Estudio de más propiedades teóricas de la distribución \mathcal{G}_A^0 , bien como de sus estimadores.

- (b) Propuesta y evaluación de otras técnicas de inferencia. En esta línea de trabajo se han realizado estudios, donde se busca la mejoría del estimador de máxima verosimilitud.
 - (c) Propuesta y evaluación de otras técnicas de simulación para la obtención de observaciones de variables aleatorias con distribución \mathcal{G}_A^0 .
2. Otras aplicaciones del modelo \mathcal{G}_A^0 :
- (a) Desarrollo de filtros bajo este modelo, para la obtención de imágenes donde el ruido *speckle* ha sido combatido. Estos filtros podrán estar directamente basados en la estimación de los parámetros de la distribución o en la utilización de técnicas Bayesianas para la obtención de estimadores MAP, por ejemplo
 - (b) Desarrollo de detectores de bordes, bajo el modelo \mathcal{G}_A^0 . Los detectores de bordes se basan en la localización de cambios en las características espaciales de la imagen. Una posible forma de obtener detectores bajo este modelo es la construcción de testes de hipótesis que, utilizando muestras de pequeño tamaño, puedan discriminar muestras con diferentes parámetros.
 - (c) Desarrollo de segmentadores basados en el modelo \mathcal{G}_A^0 . En este trabajo fueron obtenidas clasificaciones, pero en ciertas aplicaciones no es necesario llegar hasta la rotulación de las clases, bastando la identificación de las mismas.
3. Generalizaciones y extensiones del modelo \mathcal{G}_A^0 :
- (a) Caracterizar procesos estocásticos con correlación espacial y distribución marginal \mathcal{G}_A^0 . Estos procesos podrán ser utilizados para aumentar el realismo y la expresividad del modelado de imágenes SAR bajo el modelo multiplicativo.
 - (b) Caracterizar distribuciones polarimétricas con diferentes grados de rugosidad para cada componente, utilizando el modelo. Actualmente se dispone de un modelo para datos polarimétricos donde surge la versión multivariada de la distribución tratada en esta tesis: la distribución \mathcal{G}^0 -multivariada, siendo su principal debilidad la imposición de un único parámetro de heterogeneidad para cada componente. La obtención de un modelo que permita diferentes parámetros α para cada componente permitirá

ajustes más precisos de este tipo de datos, tan importantes para la discriminación fina de blancos.

Apéndice A

Función de Bessel

Presentaremos aquí la función K_ν que es la función de Bessel de tercera especie y orden ν y viene dada por la integral A.1:

$$K_\nu(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}\omega(x+x^{-1})} dx, \quad \omega > 0 \quad (\text{A.1})$$

Presentaremos algunos resultados concernientes a la función K_ν que han sido extraídos[AS64]

Las funciones de Bessel K_ν , $\nu \in R$, satisfacen las siguientes relaciones:

$$K_\nu(\omega) = K_{-\nu}(\omega) \quad (\text{A.2})$$

$$K_{\nu+1}(\omega) = \frac{2\nu}{\omega K_\nu(\omega)} + K_{\nu-1}(\omega) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{d\omega} K_\nu(\omega) = -\frac{1}{2} (K_{\nu+1}(\omega) + K_{\nu-1}(\omega)) \quad (\text{A.4})$$

Relaciones asintóticas para $K_\nu(\omega)$ cuando $\omega \rightarrow 0$, se deducen usando la representación en serie

de la función de Bessel modificada de primera especie I_ν , que está definida como:

$$I_\nu(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\omega/2)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \quad (\text{A.5})$$

La siguiente fórmula establece una conexión entre las funciones de Bessel K_ν e I_ν ,

$$K_\nu(\omega) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi\nu)} (I_{-\nu}(\omega) - I_\nu(\omega)) \quad (\text{A.6})$$

Luego, como caso particular, debido a Watson en 1944, para $\nu > 0$ se cumple:

$$K_\nu(\omega) \sim 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) \omega^{-\nu} \quad \text{cuando } \omega \rightarrow 0 \quad (\text{A.7})$$

y

$$K_0(\omega) \sim -\ln \omega \quad \text{cuando } \omega \rightarrow 0 \quad (\text{A.8})$$

La siguiente fórmula debida a Ismail (1977) muestra la relación asintótica para ν grande

$$K_\nu(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} 2^\nu \nu^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\nu} \omega^{-\nu} \quad \text{cuando } \nu \rightarrow \infty \quad (\text{A.9})$$

Recordando que:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Fórmula de Stirling: $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} e^{-z} z^{z-1/2}$ para $z \rightarrow \infty$

La función Gamma está definida como $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ y que $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$

Apéndice B

Asimetría y Curtosis

Definición 52 *El coeficiente de asimetría de una distribución es:*

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X - E(X))^3}{(E(X^2) - E^2(X))^{3/2}} \quad (\text{B.1})$$

Definición 53 *El coeficiente de curtosis de una distribución es:*

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X - E(X))^4}{(E(X^2) - E^2(X))^2} - 3 \quad (\text{B.2})$$

- Distribución $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$

Recordemos que los momentos de orden r de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ son:

$$E(X^r) = \gamma^{r/2} \frac{\Gamma(-\alpha - r/2)}{\Gamma(-\alpha)}, \text{ para } -\alpha > r/2 \quad (\text{B.3})$$

y la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \gamma \left(\frac{1}{-\alpha - 1} - \frac{\Gamma^2(-\alpha - 1/2)}{\Gamma^2(-\alpha)} \right), \text{ para } -\alpha > 0, -\alpha \neq 1 \quad (\text{B.4})$$

Tenemos también que:

$$\begin{aligned} E(X - E(X))^3 &= E(X^3) - 3E(X^2)E(X) - 2E^3(X) \\ E(X - E(X))^4 &= E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X) \end{aligned}$$

Reemplazando (B.3) y (B.4) en la ecuación (B.1), obtenemos:

$$\mu_3 = \frac{\gamma^{3/2}}{\Gamma^3(-\alpha)} (\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 3/2) - 3\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 1)\Gamma(-\alpha - 1/2) + 2\Gamma^3(-\alpha - 1/2))$$

$$\sigma^3 = Var^{3/2}(X) = \frac{\gamma^{3/2}}{(-\alpha - 1)\Gamma^3(-\alpha)} (\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^{3/2}$$

Luego, el coeficiente de asimetría de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ es:

$$\gamma_1 = \frac{(-\alpha - 1) (\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 3/2) - 3\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 1)\Gamma(-\alpha - 1/2) + 2\Gamma^3(-\alpha - 1/2))}{(\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^{3/2}}$$

definido para $-\alpha > 3/2$.

De las ecuaciones (B.2), (B.3) y (B.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_4 = & \frac{\gamma^2}{\Gamma^4(-\alpha)} (\Gamma^3(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 2) - 4\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 3/2)\Gamma(-\alpha - 1/2) + \\ & + 6\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2) - 3\Gamma^4(-\alpha - 1/2)) \end{aligned}$$

y

$$\sigma^4 = \frac{\gamma^2}{\Gamma^4(-\alpha)} (\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^2$$

Luego, el coeficiente de curtosis de la distribución $\Gamma^{-1/2}$ es:

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & \frac{\Gamma^3(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 2) - 4\Gamma^2(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 3/2)\Gamma(-\alpha - 1/2)}{(\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^2} + \\ & + \frac{6\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2) - 3\Gamma^4(-\alpha - 1/2)}{(\Gamma^2(-\alpha) - (-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))^2} - 3 \end{aligned}$$

definido para $-\alpha > 2$.

- Distribución \mathcal{K}_A

Utilizando las ecuaciones (B.1) y (B.2) se calculan los coeficientes γ_1 y γ_2 de la distribución \mathcal{K}_A de la siguiente manera:

siendo

$$E(X - E(X))^3 = \frac{(\lambda n)^{-3/2}}{\Gamma^3(n) \Gamma^3(\alpha)} (\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) \Gamma(n+3/2) \Gamma(\alpha+3/2) - \\ - 3n\Gamma^2(n) \alpha\Gamma^2(\alpha) \Gamma(n+1/2) \Gamma(\alpha+1/2) - 2\Gamma^3(n+1/2) \Gamma^3(\alpha+1/2))$$

y

$$(E(X^2) - E^2(X))^{3/2} = \frac{(\lambda n)^{-3/2}}{\Gamma^3(n) \Gamma^3(\alpha)} (n\alpha\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) - \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(\alpha+1/2))^{3/2}$$

entonces

$$\gamma_1 = \frac{(\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) \Gamma(n+3/2) \Gamma(\alpha+3/2) - 3n\Gamma^2(n) \alpha\Gamma^2(\alpha) \Gamma(n+1/2) \Gamma(\alpha+1/2) - 2\Gamma^3(n+1/2) \Gamma^3(\alpha+1/2))}{(n\alpha\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) - \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(\alpha+1/2))^{3/2}}$$

Siendo

$$E(X - E(X))^4 = \frac{(\lambda n)^{-2}}{\Gamma^4(n) \Gamma^4(\alpha)} (\Gamma^3(n) \Gamma^3(\alpha) \Gamma(n+2) \Gamma(\alpha+2) - \\ - 4(n+1/2)(\alpha+1/2) \Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(\alpha+1/2) + \\ + 6n\alpha\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(\alpha+1/2) - 3\Gamma^4(n+1/2) \Gamma^4(\alpha+1/2))$$

y

$$(E(X^2) - E^2(X))^2 = \frac{(\lambda n)^{-2}}{\Gamma^4(n) \Gamma^4(\alpha)} (n\alpha\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha) - \Gamma^2(n+1/2) \Gamma^2(\alpha+1/2))^2$$

Luego, efectuando el cociente y restando 3, nos queda el coeficiente γ_2 . Ninguno de los dos coeficientes depende del parámetro γ .

Apéndice C

Función Característica

Definición 54 Sea X una variable aleatoria. Una función característica de X es una función $\varphi : R \rightarrow C$, definida por $\varphi = \varphi_X(t) = E(e^{itX})$

Propiedades

1. $|\varphi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in R^k, \quad \varphi_X(0) = 1$
2. $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$
3. φ_X es uniformemente continua en R
4. $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$, $\forall t \in R$, si X e Y son independientes.
5. $X \sim Y \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, $\forall t \in R$
6. Si $Y = aX + b$ entonces $\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$
7. Si $E|X|^n < \infty$, entonces φ_X posee n derivadas continuas y $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k E(X^k e^{itx})$, $\forall t \in R, \forall k = 0, 1, \dots, n$
8. $E(X^k) = (-i)^k \varphi_X^{(k)}(0)$, $\forall k = 0, 1, \dots, n$

Apéndice D

Función Generadora de Momentos

Definición 55 Sea X una variable aleatoria. La transformada de Laplace de X es una función $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $L = L_X(t) = E(e^{tX})$ y la transformada de cumulantes definida por $\kappa_X(t) = \log L_X(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Propiedades

1. $L_X(0) = 1$ y $\kappa_X(0) = 1$
2. $L_{X+Y}(t) = L_X(t) L_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, si X e Y son independientes
3. $L_X(it) = \varphi_X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
4. Si $Y = aX + b$ entonces $L_Y(t) = e^{tb} L_X(at)$
5. Si $E|X|^n < \infty$, entonces L_X posee n derivadas continuas y

$$L_X^{(k)}(t) = E\left(X^k e^{tx}\right), \forall t \in \mathbb{R}, \forall k = 0, 1, \dots, n$$

luego, se tiene el siguiente resultado

$$E\left(X^k\right) = L_X^{(k)}(0), \forall k = 0, 1, \dots, n$$

también a L_X se la llama función generadora de momentos.

La primera y segunda derivada de κ_X vienen dadas por:

$$\kappa'_X(t) = \frac{L'_X(t)}{L_X(t)} \text{ y } \kappa''_X(t) = \frac{L''_X(t)}{L_X(t)} - \left(\frac{L'_X(t)}{L_X(t)} \right)^2$$

en particular se tiene que:

$$E(X) = \kappa'_X(0), \text{ Var}(X) = \kappa''_X(0)$$

Apéndice E

Propiedades de Convergencia

En las siguientes propiedades se verán las convergencias para las distintas distribuciones involucradas en este trabajo.[FMYS97], [YFS95]

1. La distribución raíz cuadrada de Gamma converge en probabilidad hacia una constante, es decir, $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda) \xrightarrow{\text{Pr}} \beta_1^{1/2}$ cuando $\alpha, \lambda \rightarrow \infty$ y $\frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \beta_1$
2. La distribución recíproca de la raíz cuadrada de Gamma converge en probabilidad hacia una constante, es decir, $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma) \xrightarrow{\text{Pr}} \beta_2^{-1/2}$ cuando $-\alpha, \gamma \rightarrow \infty$ y $\frac{\alpha}{\gamma} \rightarrow \beta_2$
3. La distribución raíz cuadrada de la gaussiana inversa generalizada converge en distribución a las siguientes distribuciones:
 - a) $N^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) \xrightarrow{D} \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ cuando $\gamma \downarrow 0$ y $\alpha, \lambda > 0$
 - b) $N^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) \xrightarrow{D} \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ cuando $\lambda \downarrow 0$ y $-\alpha, \gamma > 0$
4. La distribución \mathcal{K}_A converge en distribución a la raíz cuadrada de Gamma, es decir $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n) \xrightarrow{D} \Gamma^{1/2}(n, n/\beta_1)$ cuando $\alpha, \lambda \rightarrow \infty$ y $\frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \beta_1$
5. La distribución \mathcal{G}_A^0 converge en distribución a raíz cuadrada de Gamma, $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n) \xrightarrow{D} \Gamma^{1/2}(n, n\beta_2)$ cuando $-\alpha, \gamma \rightarrow \infty$ y $\frac{\alpha}{\gamma} \rightarrow \beta_2$
6. La distribución \mathcal{G}_A converge en distribución a las siguientes distribuciones:
 - a) $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n) \xrightarrow{D} \mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ cuando $\gamma \downarrow 0$ y $\alpha, \lambda > 0$

b) $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n) \xrightarrow{D} \mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ cuando $\lambda \downarrow 0$ y $-\alpha, \gamma > 0$

Apéndice F

Anexo \mathcal{K}_A

Proposición 56 Sean X_A e Y_A dos variables aleatorias independientes tales que $X_A \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ y $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ con $\alpha, \lambda, n > 0$, entonces la variable aleatoria producto $Z_A = X_A Y_A$ tiene distribución $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ con $\alpha, \lambda, n > 0$.

Demostración

Si $Z_A = X_A Y_A$ y X_A e Y_A son variables aleatorias independientes, entonces la función de densidad f_{Z_A} de Z_A es $f_{Z_A}(z) = \int_0^\infty f_{X_A}\left(\frac{z}{y}\right) f_{Y_A}(y) \frac{1}{y} dy$ (ver Apéndice H proposición 64). Luego como

$$f_X(x) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\lambda x^2} \text{ y } f_Y(y) = \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} f_{Z_A}(z) &= \int_0^\infty \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{z}{y}\right)^{2\alpha-1} e^{-\lambda\left(\frac{z}{y}\right)^2} \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2} \frac{1}{y} dy = \\ &= \frac{4\lambda^\alpha z^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{2(n-\alpha)-1} e^{-\left(\lambda\frac{z^2}{y^2} + ny^2\right)} dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{4\lambda^\alpha z^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{2(n-\alpha)-1} e^{-\frac{1}{2}(2z\sqrt{\lambda n})\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}\frac{z}{y^2} + \frac{\sqrt{n}}{z\sqrt{\lambda}}y^2\right)} dy$$

haciendo el cambio de variables $y = \frac{\sqrt{z}(\lambda)^{1/4}}{n^{1/4}} t$ $dy = \frac{\sqrt{z}(\lambda)^{1/4}}{n^{1/4}} dt$ y substituyendo se tiene:

$$\frac{4\lambda^\alpha z^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{\sqrt{z}(\lambda)^{1/4}}{n^{1/4}} \right)^{2(n-\alpha)-1} \frac{\sqrt{z}(\lambda)^{1/4}}{n^{1/4}} \int_0^\infty t^{2(n-\alpha)-1} e^{-\frac{1}{2}(2z\sqrt{\lambda n})\left(\frac{1}{t^2} + t^2\right)} dt$$

llamando $t^2 = s$, $2tdt = ds$

$$\frac{4\lambda^\alpha z^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{\sqrt{z}(\lambda)^{1/4}}{n^{1/4}} \right)^{2(n-\alpha)-1} \frac{\sqrt{z}(\lambda)^{1/4}}{n^{1/4}} \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{(n-\alpha)-1} e^{-\frac{1}{2}(2z\sqrt{\lambda n})\left(\frac{1}{s} + s\right)} ds$$

y se obtiene la siguiente función de densidad correspondiente a una variable aleatoria con distribución \mathcal{K}_A

$$f_Z(z) = \frac{4 \left(\sqrt{\lambda n} \right)^{(n+\alpha)} z^{n+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n)} K_{\alpha-n} \left(2z\sqrt{\lambda n} \right)$$

Propiedad 57 La distribución \mathcal{K}_A es unimodal y su moda es:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{4(\sqrt{\lambda n})^{\alpha+n}}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left(x^{\alpha+n-1} K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) \right) = 0$$

$$x^{\alpha+n-2} K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) + x^{\alpha+n-1} \frac{d}{dx} K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) =$$

$$= x^{\alpha+n-2} \left(K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) + x \frac{d}{dx} K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) \right) =$$

siendo

$$\frac{d}{dx} K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) = -x\sqrt{\lambda n} \left(K_{\alpha-n+1} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) + K_{\alpha-n-1} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) \right)$$

reemplazando

$$x^{\alpha+n-2} \left(K_{\alpha-n} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) - x^2\sqrt{\lambda n} \left(K_{\alpha-n+1} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) + K_{\alpha-n-1} \left(2x\sqrt{\lambda n} \right) \right) \right) = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{K_{\alpha-n}(2x\sqrt{\lambda n})}{\sqrt{\lambda n}(K_{\alpha-n+1}(2x\sqrt{\lambda n}) + K_{\alpha-n-1}(2x\sqrt{\lambda n}))}}$$

Apéndice G

Estimadores

G.1 Estimación por Momentos

Momentos de una distribución. Condiciones para la determinación de una distribución por sus momentos

Unicidad Sea F una distribución definida en la recta real con una sucesión de momentos:

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{G.1})$$

Teorema 58 *La distribución F queda unívocamente determinada por la sucesión de momentos $\{\lambda_k\}$ si se cumple la condición*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty \quad (\text{G.2})$$

Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para (G.2)

- a) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) \right)^{\frac{1}{k}} = \nu < \infty$
- b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k!} \nu^k$ converge absolutamente en un intervalo $|\nu| < \nu_0$

Existencia

Lemma 59 Sea X una variable aleatoria entonces,

a) $E[X] = \int_0^{\infty} P(|X| \geq t) dt, (\leq \infty)$

b) Si $E[X] < \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} [t P(|X| \geq t)] = 0$

Corolario 60 Para cualquier variable aleatoria X , y cualquier número real $r > 0$ valen

a) $E[X]^r = r \int_0^{\infty} t^{r-1} P(|X| \geq t) dt$

b) Si $E[X]^r < \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} [t^{-r} P(|X| \geq t)] = 0$

Una condición necesaria y suficiente para que $E[X]^r < \infty$ es que $t^{r-1} P(|X| \geq t)$ sea integrable.

Momentos Muestrales

Sean X_1, X_2, \dots, X_k , variables aleatorias con función de distribución F . Se define el momento de orden k de F como

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = E[X_1^k], \quad k > 0, \quad (\text{G.3})$$

Los momentos correspondientes a la función de distribución muestral F_n son estimadores naturales de estos parámetros, es decir, λ_k puede ser estimado por

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{G.4})$$

Estos estimadores son consistentes en el sentido usual y su distribución conjunta es asintóticamente una distribución normal multivariada.

Los estimadores a_k son la media de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media λ_k y varianza $\lambda_{2k} - \lambda_k^2$.

Por la ley fuerte de los grandes números se tiene el siguiente

Teorema 61 Sean a_k y λ_k definidos como en (G.3) y (G.4) respectivamente, entonces

a) $a_k \xrightarrow{wp1} \lambda_k$ (wp1 es la convergencia con probabilidad 1)

b) $E[a_k] = \lambda_k$

$$c) \text{Var}[a_k] = \frac{\lambda_{2k} - \lambda_k^2}{n}.$$

El ítem a) implica la consistencia fuerte y b) y c) juntos la consistencia en media cuadrática.

G.2 Estimación por el método de Máxima Verosimilitud

Sean X_1, \dots, X_k variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con función de distribución F_θ que pertenece a la familia

$\mathcal{F} = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ y supongamos que las distribuciones F_θ poseen funciones de densidad $f(x; \theta)$, $\Theta \in \mathbb{R}^n$.

la función de verosimilitud de la muestra X_1, \dots, X_k se define como

$$L(\theta; X_1, \dots, X_k) = \prod_{i=1}^k f(X_i; \theta)$$

donde la densidad conjunta de las observaciones es tratada como función de θ .

El estimador de máxima verosimilitud (MV) de θ es un valor $\hat{\theta}$ que maximiza L en θ . De manera equivalente, se considera la función $\log L$ para maximizarla por ser más conveniente para los cálculos. Entonces el estimador $\hat{\theta}$ es la solución del sistema de ecuaciones de verosimilitud:

$$\left. \frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

y confirmando que $\hat{\theta}$ maximiza L .

G.3 Estadísticos de Orden

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con función de distribución F . Consideremos los valores muestrales ordenados $X_{n1} \leq X_{n2} \leq \dots \leq X_{nn}$, entonces el vector $\mathbf{X}_{(n)} = (X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn})$ se llama estadístico de orden de la muestra.

La distribución del estadístico de orden k , X_{nk} se puede hallar:

$$P(X_{nk} \leq x) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}$$

G.4 Criterios de Comparación

Definición 62 *Error cuadrático medio* $mse = (\hat{\alpha} - \alpha)^2 + var(\hat{\alpha})$.

Para comparar estimadores, incluyendo a los estimadores sesgados, un criterio muy útil es el criterio del error cuadrático medio, que se define como el valor esperado del cuadrado de la desviación entre el valor estimado y el parámetro y lo denotaremos mse . Luego, (tomemos $\alpha = \theta$) tenemos que $mse = E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right]$ y se prueba que esta cantidad es igual a la varianza más el sesgo al cuadrado, como se puede ver en el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] &= E \left[\left\{ (\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) - (E(\hat{\theta}) - \theta) \right\}^2 \right] = \\ &= E \left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 \right] + E \left[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \right] + 2 (E(\hat{\theta}) - \theta) E \left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) \right] = \\ &= Var(\hat{\theta}) + (sesgo)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ya que } E \left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) \right] = E[\hat{\theta}] - E[E(\hat{\theta})] = E[\hat{\theta}] - E[\hat{\theta}] = 0$$

Definición 63 *Consistencia*

El criterio de consistencia involucra el comportamiento del estimador cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente. Es decir decimos que un estimador $\hat{\theta}$ es consistente si para cualquier ϵ pequeño, la probabilidad de que el valor absoluto de la desviación entre $\hat{\theta}$ y θ sea menor que ϵ tiende a 1 cuando n tiende a infinito, o sea:

$$\Pr \left\{ |\hat{\theta} - \theta| < \epsilon \right\} \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Apéndice H

Simulación

Proposición 64 Sean X , Y y Z variables aleatorias tales que, X e Y son independientes y Z es una función de X e Y . Entonces la función de densidad de Z viene dada por:

$$f_Z = f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\frac{1}{y}$$

Demostración

Sea $Z = XY$, consideremos la variable aleatoria condicional $W = Z/Y = y$ para cada valor y en el espacio muestral. La función de distribución acumulada de W es, para cada valor y :

$$F_W(w) = \Pr(W \leq w) = \Pr(y \cdot X \leq w) = \Pr(X \leq \frac{w}{y}) = F_X\left(\frac{w}{y}\right)$$

luego, la función de densidad de W viene dada por:

$$f_W(w) = f_X\left(\frac{w}{y}\right)\frac{1}{y}$$

Consideremos la distribución conjunta (Z, Y) cuya densidad es:

$$f_{ZY}(z, y) = f_W(z)f_Y(y)$$

entonces la función de densidad de Z viene dada por:

$$f_Z(z) = \int f_{ZY}(z, y) dy = \int f_W(z) f_Y(y) dy = \int f_Z\left(\frac{z}{y}\right) \frac{1}{y} f_Y(y) dy$$

Proposición 65 Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes tales que $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, 1)$ y $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, 1)$, entonces las variables aleatorias $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ y $Y_2 = X_1 + X_2$ son independientes y cumplen que $Y_1 \sim \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$ y $Y_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, 1)$. (\mathcal{B} es la distribución Beta)

Proposición 66 Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ y $Y \sim \mathcal{B}(\beta, \beta - \alpha)$, con $0 < \alpha < \beta$, entonces XY y $X(1 - Y)$ son variables aleatorias con distribución $\Gamma(\beta, 1)$ y $\Gamma(\beta - \alpha, 1)$ respectivamente.

Proposición 67 Si $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ entonces $kX \sim \Gamma(\alpha, k\beta)$.

Proposición 68 Si (U_1, \dots, U_k) son variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$ y si $\alpha = k \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $\beta = 1$ entonces $Z = -\ln\left(\prod_{i=1}^k U_i\right)$ es una variable aleatoria con distribución $\Gamma(k, 1)$

Demostración

Por inducción en k

Para $k = 1$ si $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ entonces $Z = -\ln U$, la función de densidad es $f_Z(z) = e^{-z}$ con $z > 0$, luego es cierto para $k = 1$ que $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Supongamos cierto para k y probemos para $k + 1$.

Llamemos $X = -\ln(U_i)$ y $Y = -\ln\left(\prod_{i=1}^k U_i\right)$, por la hipótesis inductiva se tiene que $Y \sim \Gamma(k, 1)$ y que la función de densidad de X es $f_X(x) = e^{-x}$, entonces llamemos $Z = -\ln\left(\prod_{i=1}^{k+1} U_i\right) = X + Y$ y teniendo en cuenta que $0 \leq e^{-x} \leq 1$

$f_Z(z) = \int f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_0^z e^{-z+y} \frac{y^{k-1} e^{-y}}{\Gamma(k)} dy = \frac{e^{-z}}{\Gamma(k)} \int_0^z y^{k-1} dy = \frac{e^{-z}}{\Gamma(k)} \frac{z^k}{k} = \frac{e^{-z} z^k}{\Gamma(k+1)}$ luego se tiene que $Z \sim \Gamma(k + 1, 1)$.

Proposición 69 Si $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$ y $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y $\alpha < 1$ entonces $YU^{1/\alpha} \sim \Gamma(\alpha, 1)$

Demostración

Si $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$ entonces su función de densidad es $f_Y(y) = \frac{y^\alpha e^{-y}}{\Gamma(\alpha+1)}$ y si $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$

entonces la variable aleatoria $X = -\ln U$ tiene distribución exponencial con parámetro 1 y su función de densidad es $f_X(x) = e^{-x}$. Consideremos la variable aleatoria $W = U^{1/\alpha}$ entonces su función de densidad es $f_W(w) = f_U(w^\alpha) \cdot \alpha w^{\alpha-1}$ como $0 \leq w^\alpha \leq 1$ entonces $f_W(w) = \alpha w^{\alpha-1}$ y por hipótesis $\alpha < 1$ luego $0 < \alpha w^{\alpha-1} < 1$. Si llamamos $Z = YU^{1/\alpha}$ entonces su densidad es $f_Z(z) = \int_0^\infty f_W\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) \frac{1}{y} dy$ está definida para $0 \leq \frac{z}{y} \leq 1$ luego $0 \leq z \leq y$ entonces obtenemos $f_Z(z) = \int_z^\infty \alpha \left(\frac{z}{y}\right)^{\alpha-1} \frac{y^\alpha e^{-y}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{y} dy = \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_z^\infty e^{-y} dy = \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-z}$ que es la densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha, 1)$.

H.0.1 Sobre desigualdades de la función gamma

Puede consultarse la bibliografía [Gau59], [Wat59], [Laf84] y [Pal97].

Se probó que:

$$\frac{1}{(k+1)^{1-\lambda}} < \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)} < \frac{1}{k^{1-\lambda}}$$

con $0 < \lambda < 1$ y $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{k}{(k+1)^{1-\lambda}} < \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k)} < \frac{1}{k^{-\lambda}}$$

En particular, se mostró, para $\lambda = 1/2$ y \forall real $k > 1$, que vale la siguiente desigualdad:

$$\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} > \frac{1}{(k+4/\pi-1)^{1/2}}$$

o sea

$$\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k)} > \frac{k}{(k+4/\pi-1)^{1/2}}$$

En [Laf84] se demostró la siguiente situación más general:

$$\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)} < (k+\beta)^{\lambda-1} \text{ y } \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)} > (k+\beta)^{\lambda-1}$$

donde β y λ son parámetros positivos y k real positivo.

Bibliografía

- [AS64] M. Abramowitz and I. Stein. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover, New York, 1964.
- [Bes89] J. Besag. Towards Bayesian image analysis. *Journal of Applied Statistics*, 16(3):395–407, 1989.
- [BF92a] O. H. Bustos and A. C. Frery. Reporting Monte Carlo results in statistics: suggestions and an example. *Revista de la Sociedad Chilena de Estadística*, 9(2):46–95, Dec. 1992.
- [BF92b] O. H. Bustos and A. C. Frery. *Simulação estocástica: teoria e algoritmos (versão completa)*. Monografias de Matemática, 49. CNPq/IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 1992.
- [BNB81] O. Barndorff-Nielsen and P. Blæsild. Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application. In C. Taille et al., editor, *Statistical distributions is scientific work*, volume 4, pages 19–44. Reidel, Dordrecht, 1981.
- [BNB83] O. E. Barndorff-Nielsen and P. Blæsild. Hyperbolic distributions. In Kotz and Johnson, editors, *Encyclopedia of statistical sciences*, volume 3, pages 700–707. Wiley, 1983.
- [Chu96] E. Chuvieco. *Fundamentos de teledetección espacial*. Ediciones Rialp, Madrid, 1996.

- [FMYS97] A. C. Frery, H.-J. Müller, C. C. F. Yanasse, and S. J. S. Sant'Anna. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(3):648–659, May 1997.
- [Fre93] A. C. Frery. *Algumas ferramentas estatísticas na síntese, análise e processamento de imagens de radar de abertura sintética*. PhD thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brazil, 1993.
- [FS93] A. C. Frery and S. J. S. Sant'Anna. Non-adaptive robust filters for speckle noise reduction. In *Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, 6., pages 165–174, Recife, PE, Brazil, 1993. SBC/UFPE.
- [FTUF82] R. K. Moore F. T. Ulaby and A. K. Fung. *Microwave remote sensing: active and passive, Vol. II: radar remote sensing and surface scattering and emission Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, London, 1982.
- [Gau59] W. Gautschi. Some elementary inequalities relating to the gamma and incomplete gamma function. *Journal Math. Phys.*, 38:77–81, 1959.
- [Goo76] J. W. Goodman. Some fundamental properties of speckle. *Journal of the Optical Society of America*, 66:1145–1150, 1976.
- [Jac99] J. Jacobo. Radar de abertura sintética. *Reporte Técnico. Depto. de Computación. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires*, 1999.
- [JPW93] I. R. Joughin, D. B. Percival, and D. P. Winebrenner. Maximum likelihood estimation of K distribution parameters for SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 31(5):989–999, September 1993.
- [JT87] E. Jakeman and R. J. A. Tough. Generalized K distribution: a statistical model for weak scattering. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(9):1764–1772, September 1987.
- [Laf84] A. Laforgia. Further inequalities for the gamma function. *Math. Comp.*, 42:597–600, 1984.

- [MJBFB98] M. Mejail, J. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, and O. H. Bustos. Parametric roughness estimation in amplitude SAR images under the multiplicative model. Submitted, 1998.
- [Oli91] C. J. Oliver. Information from SAR images. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 24:1493–1514, 1991.
- [OQ98] C. Oliver and S. Quegan. *Understanding synthetic aperture radar images*. Artech House, Boston, 1998.
- [Pal97] B. Palumbo. A generalization of some inequalities for the gamma function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 88(2):255–268, 1997.
- [Rag91] R. S. Raghavan. A method for estimating parameters of K-distributed clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(2):238–246, March 1991.
- [Ric86] J. A. Richards. *Remote sensing digital image analysis: an introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [UKBW86] F. T. Ulaby, F. Kouyate, B. Brisco, and T. M. Williams. Textural information in SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-24:235–245, 1986.
- [VF98] K. Vasconcellos and A. C. Frery. Improving estimation for intensity SAR data. *Interstat*, 4(2):1–25, 1998.
- [Wat59] G. Watson. A note on the gamma function. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 11(2):7–9, 1958/59.
- [YFS⁺93] C. C. F. Yanasse, A. C. Frery, S. J. S. Sant’Anna, P. F. Hernandez, and L. V. Dutra. Statistical analysis of SAREX data over Tapajós - Brazil. In M. Wooding and E. Attema, editors, *SAREX-92: South American Radar Experiment*, pages 25–40, Paris, 1993. ESA.

- [YFS95] C. C. F. Yanasse, A. C. Frery, and S. J. S. Sant'Anna. Stochastic distributions and the multiplicative model: relations, properties, estimators and applications to SAR image analysis. Technical Report 5630-NTC/318, INPE, São José dos Campos, SP, Brazil, 1995.